Quaderni del Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Parma

Francesca Fiorenzi

GLI ALBERI SRADICATI BINARI COME CONCETTO ESSENZIALE PER LA DESCRIZIONE DEI MODELLI DI EAB

Ottobre 1996 *n. 152*

Francesca Fiorenzi

GLI ALBERI SRADICATI BINARI COME CONCETTO ESSENZIALE PER LA DESCRIZIONE DEI MODELLI DI EAB

SOMMARIO

Si dimostra che gli alberi sradicati binari, oltre a descrivere le classi di equivalenza secondo la relazione di "distanza finita" in un modello non-standard della teoria EAB, sono tutte e sole tali classi, ovvero: *comunque preso un albero sradicato binario* $\mathbb{S}$, *esiste un modello di* EAB *nel quale* $\mathbb{S}$ *compare (a meno di isomorfismi) come classe di equivalenza*.

INTRODUZIONE

Come chiarito in [S1], [S2] ed in [F] (la cui lettura è indispensabile per la comprensione del presente lavoro), gli alberi sradicati binari (o clan binari) sono introdotti per studiare le classi di equivalenza rispetto alla relazione di "distanza finita" nei modelli non-standard della teoria elementare degli alberi binari EAB. Come dimostrato in [F], infatti, ogni tale classe è, a meno di isomorfismi, un albero sradicato binario; risulta inoltre che ogni clan di spettralità periodica compare, come classe di equivalenza, in ogni modello di EAB. In [F], tuttavia, rimane aperto il seguente problema: *dato un clan binario* $\mathbb{S}$ *esiste almeno un modello di* EAB *in cui* $\mathbb{S}$ *compaia come classe di equivalenza?*

Lo scopo del presente lavoro è quello provare (mediante il Teorema di Compattezza) che tale problema ha risposta affermativa, confermando così la congettura suggerita in [S1] secondo cui *il concetto di clan è quello "corretto" per la descrizione dei modelli non-standard di* EAB.

Si ricordi che gli elementi non-standard di un modello $\mathcal{R}^*$ di EAB sono gli elementi che non appartengono all'albero binario libero $\mathcal{R}$. In [F] abbiamo provato che un elemento è non-standard se e solo se *sta in coda* ad un ramo completo[1] ovvero se è strettamente

[1] Si dice *ramo completo* ogni catena massimale di $\mathcal{R}$.

maggiore di ogni elemento di un ramo completo. Inoltre, due elementi che appartengono alla stessa classe di equivalenza maggiorano lo stesso ramo completo.

Ricordiamo poi che ogni ramo completo è determinato da una successione binaria e viceversa. Più precisamente, se $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ è una successione esiste una ed una sola funzione[(2)]

$$h_f\colon \mathbb{N} \to R$$

tale che

$$h_f(0) = 0$$

e

$$h_f(n+1) = \sigma_{f(n)}(h_f(n)) \qquad (n \in \mathbb{N});$$

posto

$$C_f =_{def} h_f[\mathbb{N}]$$

l'insieme C_f risulta essere un ramo completo. Inoltre ogni ramo completo C è della forma C_f per una opportuna (e unica) $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

In [F][(3)] si è provato che

$$\vdash_{\text{EAB}} (\forall x)(\neg\, x \doteq \mathbf{0} \to (\exists! y)(x \doteq y + \mathbf{1}_0 \vee x \doteq y + \mathbf{1}_1));$$

risulta dunque ovvio che

$$\vdash_{\text{EAB}} (\forall x)(\exists! y)((x \doteq \mathbf{0} \wedge y \doteq \mathbf{0}) \vee (\neg\, x \doteq \mathbf{0} \wedge (x \doteq y + \mathbf{1}_0 \vee x \doteq y + \mathbf{1}_1))).$$

Estendiamo quindi EAB con il simbolo funzionale $\boldsymbol{\pi}$ mediante l'assioma definitorio

$$(\forall x)((x \doteq \mathbf{0} \wedge \boldsymbol{\pi}(x) \doteq \mathbf{0}) \vee (\neg\, x \doteq \mathbf{0} \wedge (x \doteq \boldsymbol{\pi}(x) + \mathbf{1}_0 \vee x \doteq \boldsymbol{\pi}(x) + \mathbf{1}_1)));$$

con tale definizione abbiamo in sostanza esteso la funzione di predecessore definita in [F] anche all'elemento 0.

Teorema 1 - *Sia C un ramo completo e sia $s\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$; esistono allora un modello numerabile $\mathfrak{R}^*$ di* EAB *ed un elemento α di R^* tali che*

$$\alpha > C \quad e \quad \text{spec}(\alpha) = s.$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ tale che $C = C_f$ e sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione degli elementi di C:

$$a_n = h_f(n) \qquad (n \in \mathbb{N});$$

si consideri la successione $(\mathbf{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di termini costanti di $\mathfrak{L}_{\text{EAB}}$ definita da[(4)]

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$$

---

2 Le notazioni si discostano leggermente da quelle che si sono utilizzate in [F].

3 Cfr. [F], Teorema 3.1.7, p. 91.

e

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_n + \mathbf{1}_{f(n)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Sia $\mathcal{L}'$ il linguaggio ottenuto da $\mathcal{L}_{\mathrm{EAB}}$ arricchendolo con una nuova costante $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{\mathrm{EAB}} \cup \{\boldsymbol{\alpha}\}$$

e sia $\mathcal{A}'$ l'insieme di assiomi ottenuti aggiungendo ad $\mathcal{A}_{\mathrm{EAB}}$ gli enunciati

$$\mathbf{T}_n \mathbin{\boldsymbol{<}} \boldsymbol{\alpha} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

e

$$\boldsymbol{\pi}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{1}_{s(n)} \doteq \boldsymbol{\pi}^{n}(\boldsymbol{\alpha}) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mostriamo che la teoria $(\mathcal{L}', \mathcal{A}')$ è finitamente coerente. Sia infatti Γ un sottoinsieme finito di $\mathcal{A}'$; esiste allora $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\Gamma \subseteq \mathcal{A}''$$

ove $\mathcal{A}''$si ottiene aggiungendo ad $\mathcal{A}_{\mathrm{EAB}}$ gli enunciati

$$\mathbf{T}_h \mathbin{\boldsymbol{<}} \boldsymbol{\alpha} \qquad (h \le n)$$

e

$$\boldsymbol{\pi}^{h+1}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{1}_{s(h)} \doteq \boldsymbol{\pi}^{h}(\boldsymbol{\alpha}) \qquad (h < n).$$

Si consideri la successione $\underline{s}\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ definita da

$$\underline{s}(h) = s(n - h) \qquad (h \le n)$$

e

$$\underline{s}(h) = s(h) \qquad (h > n);$$

posto

$$x =_{def} h_{\underline{s}}(n + 1),$$

si consideri la struttura $\mathcal{R}''$ che sia espansione di $\mathcal{R}$ al linguaggio $\mathcal{L}'$ e tale che

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathcal{R}''} = a_{n+1} + x.$$

La struttura $\mathcal{R}''$ è un modello di $(\mathcal{L}', \mathcal{A}'')$ infatti

$$\models_{\mathcal{R}''} \mathbf{T}_h \mathbin{\boldsymbol{<}} \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow a_h < a_{n+1} + x \qquad (h \le n)$$

e siccome

$$a_h \le a_n \qquad (h \le n)$$

si ha che

$$\models_{\mathcal{R}''} \mathbf{T}_h \mathbin{\boldsymbol{<}} \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow a_n < a_n + \sigma_{f(n)}(0) + x \qquad (h \le n).$$

Si osservi che

$$\rho(\boldsymbol{\alpha}^{\mathcal{R}''}) = \rho(a_{n+1}) + \rho(x) = n + 1 + \rho(x) > n$$

e quindi, per ogni $h < n$, l'elemento $\pi^{h+1}(\alpha^{\mathcal{R}''})$ è definito; si ha allora

---

[4] Si veda la dimostrazione del Teorema 4.1.16 di [F].

$$\models_{\mathfrak{R}''} \boldsymbol{\pi}^{h+1}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{1}_{s(h)} \doteq \boldsymbol{\pi}^{h}(\boldsymbol{\alpha}) \Leftrightarrow \sigma_{s(h)}(\pi^{h+1}(a_{n+1} + x)) = \pi^{h}(a_{n+1} + x) \qquad (h < n)$$

ovvero

$$\models_{\mathfrak{R}''} \boldsymbol{\pi}^{h+1}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{1}_{s(h)} \doteq \boldsymbol{\pi}^{h}(\boldsymbol{\alpha}) \Leftrightarrow \mathrm{g}(\pi^{h}(a_{n+1} + x)) = s(h) \qquad (h < n).$$

Per induzione su $h < n$ proviamo che

$$\pi^{h}(a_{n+1} + x) = a_{n+1} + h_{\underline{s}}(n + 1 - h)$$

Se $h = 0$ si ha che

$$\pi^{h}(a_{n+1} + x) = a_{n+1} + x = a_{n+1} + h_{\underline{s}}(n + 1) = a_{n+1} + h_{\underline{s}}(n + 1 - h)$$

Se l'asserto vale per h ed è $h + 1 < n$, si ha che

$$\pi^{h+1}(a_{n+1} + x) = \pi(\pi^{h}(a_{n+1} + x)) = \pi(a_{n+1} + h_{\underline{s}}(n + 1 - h)) = \pi(a_{n+1} + \sigma_{\underline{s}(n-h)}(h_{\underline{s}}(n - h)))$$

da cui

$$\pi^{h+1}(a_{n+1} + x) = \pi(\sigma_{\underline{s}(n-h)}(a_{n+1} + h_{\underline{s}}(n - h))) = a_{n+1} + h_{\underline{s}}(n - h) = a_{n+1} + h_{\underline{s}}(n + 1 - (h + 1)).$$

Si ha dunque che, per ogni $h < n$,

$$\mathrm{g}(\pi^{h}(a_{n+1} + x)) = \mathrm{g}(a_{n+1} + h_{\underline{s}}(n + 1 - h)) = \mathrm{g}(\sigma_{\underline{s}(n-h)}(a_{n+1} + h_{\underline{s}}(n - h))) = \underline{s}(n - h) = s(h).$$

Dunque $\mathfrak{R}''$ è un modello di ($\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{A}''$); per il Teorema di Compattezza la teoria ($\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{A}'$) risulta essere coerente. Essendo poi $\mathfrak{L}'$ un linguaggio finito si ha, per il Teorema di Löwenheim-Skolem, che la teoria ha un modello numerabile $\mathfrak{R}'$; posto

$$\alpha =_{def} \boldsymbol{\alpha}^{\mathfrak{R}'}$$

si ha

$$a_n < \alpha \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ovvero

$$C < \alpha.$$

Inoltre

$$\models_{\mathfrak{R}'} \boldsymbol{\pi}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{1}_{s(n)} \doteq \boldsymbol{\pi}^{n}(\boldsymbol{\alpha}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ovvero

$$\sigma_{s(n)}(\pi^{n+1}(\alpha)) = \pi^{n}(\alpha) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

da cui

$$\mathrm{g}(\pi^{n}(\alpha)) = s(n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Sia ora

$$\mathfrak{R}^* =_{def} \mathfrak{R}' \lceil \mathfrak{L};$$

si ha che $\mathfrak{R}^*$ è un modello numerabile di EAB per il Teorema di Coincidenza e in R^* esiste un elemento α di spettro s che sta in coda a C.

Come conseguenza del Teorema 1 si ha il

Teorema 2 - *Sia C un ramo completo e sia* $\mathbb{S}$ *un albero sradicato binario; esiste allora un modello* $\Re^*$ *di* EAB *che è numerabile e in cui* $\mathbb{S}$ *compare, come classe di equivalenza, in coda a C.*

DIMOSTRAZIONE

Sia infatti s = Spec($\mathbb{S}$), sia $\Re^*$ il modello di EAB di cui al Teorema 1 e sia α un elemento di R^* di spettro s; la classe $[\alpha]$ è un albero sradicato binario di spettralità s ed è quindi, per il Teorema 33 di [S2], isomorfa a $\mathbb{S}$.

I risultati esposti sono utili per rispondere anche ad un altro problema rimasto aperto in [F](5): *il fatto che in* $\Re^*$ *compaia un elemento con spettro non periodico implica che la cardinalità dell'insieme degli elementi con spettro non periodico sia più che numerabile?* Per quanto dimostrato, tale quesito ha risposta *negativa* dato che esistono modelli numerabili di EAB in cui compaiono elementi con spettro non periodico.

5 Cfr. [F], p. 141.

BIBLIOGRAFIA

[F] FRANCESCA FIORENZI, *Modelli non-standard della Teoria Elementare degli Alberi Binari*, Tesi di Laurea, Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Luglio 1996.

[S1] MARIO SERVI, *Albero binario e classificazione dei clan binari (numeri naturali binari e numeri interi binari),* Quaderno n. 112 del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Giugno 1995.

[S2] MARIO SERVI, *Classificazione dei clan binari*, Quaderno n. 113 del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Giugno 1995.

Stampato in proprio dal Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Parma in Via M. D'Azeglio 85/A, 43100 Parma, adempiuti gli obblighi di cui all'articolo 1 del D. L. 31 agosto 1946 n. 660.