Quaderni del Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Parma

Francesca Fiorenzi
ALBERO BINARIO LIBERO

Novembre 1996 n. 153

Francesca Fiorenzi

ALBERO BINARIO LIBERO

SOMMARIO

Un *albero binario libero* $\mathcal{R}$ è un albero radicato in cui ogni nodo ha esattamente due successori distinguibili mediante una “etichetta”. In una tale struttura valgono le proprietà di *ricorsione*; in particolare la *ricorsione semplice* garantisce che una struttura di albero binario libero è unica a meno di isomorfismi. Si dimostra che in $\mathcal{R}$ è definibile una operazione di somma che generalizza, nel caso binario, la somma tra numeri naturali, si studiano altre importanti operazioni e relazioni di $\mathcal{R}$ e si caratterizzano le catene massimali rispetto ad una relazione di *ordine verticale*. Si prova, senza Assioma di Scelta, che, rispetto a tale ordine, ogni catena è estendibile ad una catena massimale.

INDICE

INTRODUZIONE	2
ALBERO BINARIO LIBERO	
Albero binario libero e teoremi di ricorsione	2
La somma, l'ordinamento ed il prodotto in $\mathcal{R}$	12
Il monoide libero su due generatori	23
Le generazioni e gli ordini orizzontali in $\mathcal{R}$	26
Le catene di $\mathcal{R}$	39
L'azione di $\mathcal{N}$ su $\mathcal{R}$	48
BIBLIOGRAFIA	54
INDICE ANALITICO	55
INDICE DEI SIMBOLI	55

INTRODUZIONE

La struttura dei numeri naturali $\mathcal{N} = (\mathbb{N}; s; 0)$, ovvero il noto modello degli assiomi di Peano, può essere considerata un albero in cui il numero 0 è la radice e ogni nodo ha esattamente un successore. Vista in tal modo, essa si presta ad una ovvia generalizzazione se si richiede che i successori di un nodo siano ora esattamente due e distinguibili (diciamo *successore sinistro* e *successore destro*). Chiameremo *albero binario libero* una struttura $\mathcal{R}$ siffatta; per essa valgono proprietà del tutto simili agli assiomi di Peano per l’Aritmetica: le funzioni di successore sono iniettive, la radice non è successore di alcun nodo e se ad un sottoinsieme dell’albero appartengono sia la radice che i successori di ogni suo nodo allora questo coincide con l’intero albero (*induzione*).

Lo scopo del presente lavoro è quello di raccogliere, in una pubblicazione più breve e facilmente reperibile di quanto non sia una tesi di Laurea, le varie proprietà dell’albero binario libero $\mathcal{R}$. In sostanza si tratta di un estratto, arricchito di alcuni risultati più recenti, del primo capitolo di [F].

Ci si dedicherà, dunque, allo studio dell’albero binario libero con tecniche analoghe a quelle utilizzate in Aritmetica. Dimosteremo così vari teoremi *di ricorsione*; daremo alcune importanti definizioni, tra cui quelle di *somma* e di *ordine verticale* da essa determinato, di *prodotto* ternario e di due relazioni di *ordine orizzontale*; introdurremo il concetto di *generazione* e, infine, ci dedicheremo allo studio delle catene. Vedremo anche che l’albero binario libero è in sostanza, salvo la presentazione assiomatica da noi scelta, il *monoide libero su due generatori*, ovvero il monoide delle parole su un alfabeto di due lettere. Su tale *modello concreto* è basata la trattazione di L. Toti Rigatelli in [T], anche se questa fornisce un’assiomatizzazione incompleta per il monoide delle parole in quanto, nei nostri termini, consente che il successore destro di un elemento possa coincidere con il successore sinistro di un altro. Questo non solo compromette la categoricità della teoria, ma non permette nemmeno di definire la fondamentale operazione di somma.

§ 1 - ALBERO BINARIO LIBERO E TEOREMI DI RICORSIONE

Un *albero binario libero* è un albero radicato in cui ogni nodo ha esattamente due successori distinguibili mediante una “etichetta” o *genere*. In questo paragrafo, dopo avere dato gli assiomi per l’albero binario libero, dimosteremo che per esso valgono varie proprietà di *ricorsione*. Vedremo che una struttura soddisfa una di tali proprietà se e solo se soddisfa tutte le altre e che questo avviene se e solo se si tratta di un albero binario libero. Inoltre il fatto che per un albero binario libero valga la *ricorsione semplice*, permetterà di

dimostrare che se una tale struttura esiste essa è unica a meno di isomorfismi.

Definizione 1.1 - Si dice *albero binario libero* (di radice 0) una struttura

$$\mathcal{R} = (R; \sigma_0, \sigma_1; 0)$$

tale che:

- (A1) $\sigma_i: R \rightarrow R$ e σ_i è iniettiva $(i < 2)$;
 (A2) $\sigma_i(x) \neq \sigma_j(y)$ $(x, y \in R; i \neq j)$;
 (A3) $0 \notin \text{im}(\sigma_i)$ $(i < 2)$;
 (A4) $0 \in M$ e $\forall_{i < 2} \sigma_i[M] \subseteq M \Rightarrow M = R$ $(M \subseteq R)$.

Nel seguito (A4) sarà detto *assioma di induzione*; per un qualsiasi sottoinsieme M di R si dice *base induttiva* la proposizione $0 \in M$ e, per $x \in R$, si dice *ipotesi induttiva* la proposizione $x \in M$.

Si supponga ora che, in una struttura $\mathcal{R} = (R; \sigma_0, \sigma_1; 0)$, valga l'assioma di induzione e che una determinata proprietà P debba essere provata valida per ogni elemento di R . Con l'espressione *si dimostra per induzione su $x \in R$ che $P(x)$* si intende che, detto M l'insieme degli elementi di R aventi la proprietà P , si dimostra, mediante l'uso di (A4), l'eguaglianza $M = R$.

In modo del tutto analogo, infine, si può definire, per ogni $k > 0$, la struttura

$$\mathcal{R}_k = (R_k; \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}; 0_k)$$

di *albero k-rio libero*. In particolare gli assiomi di $\mathcal{R}_1$ coincidono con quelli di Peano per l'Aritmetica.

Teorema 1.2 (ricorsione semplice) - Sia $\mathcal{R}$ una struttura di albero binario libero e sia $\mathcal{A} = (A; \varphi_0, \varphi_1; a)$ una struttura simile a $\mathcal{R}$; allora esiste una ed una sola $f: R \rightarrow A$ tale che:

- (1) $f(0) = a$
 (2) $f(\sigma_i(x)) = \varphi_i(f(x))$ $(x \in R; i < 2)$.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo, anzitutto, l'unicità. Siano f, g entrambe soddisfacenti le condizioni (1) e (2); posto

$$\text{Eq}(f, g) =_{\text{def}} \{x \in R \mid f(x) = g(x)\}$$

proviamo che

$$\text{Eq}(f, g) = R.$$

Infatti $0 \in \text{Eq}(f, g)$ dato che

$$f(0) = a = g(0)$$

per la condizione (1) e, supposto $x \in \text{Eq}(f,g)$ si ha che, per ogni $i < 2$, l'elemento $\sigma_i(x)$ appartiene a $\text{Eq}(f,g)$ dato che

$$f(\sigma_i(x)) = \varphi_i(f(x)) = \varphi_i(g(x)) = g(\sigma_i(x))$$

per la condizione (2) e per ipotesi induttiva. La conclusione si ottiene dall'assioma **(A4)**.

Per quanto riguarda l'esistenza, sia

$$\mathcal{G} =_{\text{def}} \{r \subseteq R \times A \mid (0,a) \in r \text{ e } \forall_{x \in R} \forall_{b \in A} ((x,b) \in r \Rightarrow \forall_{i < 2} (\sigma_i(x), \varphi_i(b)) \in r)\}.$$

Si ha che $\mathcal{G} \neq \emptyset$ in quanto $R \times A \in \mathcal{G}$; sia dunque

$$f =_{\text{def}} \bigcap_{r \in \mathcal{G}} r$$

Si dimostra che f soddisfa le proprietà che seguono.

- $f \in \mathcal{G}$

Infatti

$$\forall_{r \in \mathcal{G}} (0,a) \in r$$

e se $(x,b) \in f$ allora

$$\forall_{r \in \mathcal{G}} (x,b) \in r$$

dunque per ogni $i < 2$ si ha

$$(\sigma_i(x), \varphi_i(b)) \in r \quad (r \in \mathcal{G})$$

ovvero

$$\forall_{i < 2} (\sigma_i(x), \varphi_i(b)) \in f.$$

- f è ovunque definita

Infatti $0 \in \text{dom}(f)$ essendo

$$(0,a) \in f;$$

se $x \in \text{dom}(f)$ ed è $i < 2$ allora esiste $b \in A$ tale che

$$(x,b) \in f$$

quindi, per il punto precedente,

$$(\sigma_i(x), \varphi_i(b)) \in f$$

da cui $\sigma_i(x) \in \text{dom}(f)$.

Per induzione si ha che $\text{dom}(f) = R$.

- f è funzionale

Sia

$$M =_{\text{def}} \{x \in R \mid \exists!_{b \in A} (x,b) \in f\};$$

proviamo che $M = R$.

Si ha che $0 \in M$ infatti se, per assurdo, esistesse $b \neq a$ tale che $(0, b) \in f$ si avrebbe che $f \setminus \{(0, b)\} \in \mathcal{G}$ dunque $f \subseteq f \setminus \{(0, b)\}$ il che è assurdo.

Sia $x \in M$ e sia $i < 2$; allora per un opportuno e unico $b \in A$ si ha che $(x, b) \in f$ da cui $(\sigma_i(x), \varphi_i(b)) \in f$. Si supponga, per assurdo, che esista $c \in A$ con $c \neq \varphi_i(b)$ tale che

$$(\sigma_i(x), c) \in f;$$

definiamo allora

$$f' = f \setminus \{(\sigma_i(x), c)\}$$

e dimostriamo che $f' \in \mathcal{G}$.

Si ha che

$$(0, a) \in f'$$

dato che $(0, a) \in f$ e non può essere $(0, a) = (\sigma_i(x), c)$. Se, poi,

$$(y, d) \in f'$$

allora, per ogni $j < 2$, si ha che

$$(\sigma_j(y), \varphi_j(d)) \in f.$$

Non può essere, per un fissato $j < 2$,

$$(\sigma_j(y), \varphi_j(d)) = (\sigma_i(x), c)$$

altrimenti si avrebbe

$$i = j \text{ e } x = y \text{ e } \varphi_i(d) = c.$$

Da questo seguirebbe, essendo $(y, d) \in f' \subseteq f$,

$$(x, d) \in f$$

e, per ipotesi induttiva,

$$d = b$$

da cui

$$\varphi_i(b) = c$$

il che è escluso dalle ipotesi fatte.

Dunque se $(y, d) \in f'$ deve essere $(\sigma_j(y), \varphi_j(d)) \in f'$ per ogni $j < 2$; questo permette di concludere che $f' \in \mathcal{G}$ e quindi $f \subseteq f'$ il che è assurdo.

Si noti che il teorema precedente non fa altro che asserire che se $\mathcal{R}$ è un albero binario libero e $\mathcal{A}$ è una struttura simile ad $\mathcal{R}$ esiste uno ed un unico omomorfismo $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}$. Un albero binario libero risulta dunque essere *oggetto iniziale* nella categoria che ha come oggetti la classe delle algebre ad esso simili e come morfismi gli omomorfismi tra tali algebre.

Teorema 1.3 (ricorsione intermedia) - Sia $\mathcal{R} = (\mathcal{R}; \sigma_0, \sigma_1; 0)$ una struttura soddisfacente

la ricorsione semplice. Siano A, B insiemi, $g: A \rightarrow B$ e sia, per ogni $i < 2$, $\varphi_i: A \times B \rightarrow B$; allora esiste una ed una sola $f: A \times R \rightarrow B$ tale che:

$$(1) \quad f(a,0) = g(a) \quad (a \in A);$$

$$(2) \quad f(a,\sigma_i(x)) = \varphi_i(a,f(a,x)) \quad (a \in A; x \in R; i < 2).$$

DIMOSTRAZIONE

Sia

$$B^A =_{\text{def}} \{h \mid h: A \rightarrow B\};$$

si ha che $g \in B^A$. Si consideri, per ogni $i < 2$, la funzione $\psi_i: B^A \rightarrow B^A$ definita da

$$(\psi_i(h))(a) = \varphi_i(a,h(a)) \quad (h \in B^A; a \in A).$$

Per ricorsione semplice di $\mathcal{R}$ applicata alla struttura $(B^A; \psi_0, \psi_1; g)$ esiste un'unica funzione $f': R \rightarrow B^A$ tale che

$$\begin{aligned} f'(0) &= g, \\ f'(\sigma_i(x)) &= \psi_i(f'(x)) \quad (x \in R; i < 2). \end{aligned}$$

Sia ora $f: A \times R \rightarrow B$ definita da

$$f(a,x) = (f'(x))(a) \quad (a \in A; x \in R);$$

allora per ogni $a \in A$

$$f(a,0) = (f'(0))(a) = g(a)$$

e per ogni $a \in A, x \in R$ e $i < 2$

$$f(a,\sigma_i(x)) = (f'(\sigma_i(x)))(a) = (\psi_i(f'(x)))(a) = \varphi_i(a,(f'(x))(a)) = \varphi_i(a,f(a,x)).$$

Dimostriamo l'unicità di f .

Sia $k: A \times R \rightarrow B$ avente le proprietà (1) e (2). Sia allora $k': R \rightarrow B^A$ definita da

$$(k'(x))(a) = k(a,x) \quad (x \in R; a \in A).$$

Si ha che per ogni $a \in A$

$$(k'(0))(a) = k(a,0) = g(a)$$

ovvero

$$k'(0) = g$$

inoltre se $i < 2$ e $x \in R$ allora per ogni $a \in A$

$$(k'(\sigma_i(x)))(a) = k(a,\sigma_i(x)) = \varphi_i(a,k(a,x)) = \varphi_i(a,(k'(x))(a)) = (\psi_i(k'(x)))(a)$$

ovvero

$$k'(\sigma_i(x)) = \psi_i(k'(x)).$$

Dunque $k'=f'$ da cui, per ogni $a \in A$ e per ogni $x \in R$, si ha

$$f(a,x) = (f'(x))(a) = (k'(x))(a) = k(a,x)$$

ovvero $f = k$.

Nel seguito per ogni insieme A e per $n, i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ con $i \leq n$ indicheremo con $p_i^{(n)}$ la i -

esima proiezione di arietà n ovvero

$$p_i^{(n)}: A^n \rightarrow A$$

e

$$p_i^{(n)}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = a_i \quad (a_j \in A; 1 \leq j \leq n).$$

Lemma 1.4 - Sia $\mathcal{R} = (R; \sigma_0, \sigma_1; 0)$ una struttura che soddisfa la ricorsione intermedia; allora in essa vale la proprietà (A4).

DIMOSTRAZIONE

Sia $M \subseteq R$ tale che

$$0 \in M \text{ e } \forall_{i < 2} \sigma_i[M] \subseteq M;$$

sia $g: R \rightarrow M$ la funzione costante in 0 e sia, per ogni $i < 2$,

$$\varphi_i: R \times M \rightarrow M$$

la funzione definita da

$$\varphi_i(x, m) = \sigma_i(m) \quad (x \in R; m \in M).$$

Si ha dunque che esiste una ed una sola

$$f: R \times R \rightarrow M$$

tale che

$$f(x, 0) = g(x) = 0 \quad (x \in R)$$

e

$$f(x, \sigma_i(y)) = \varphi_i(x, f(x, y)) = \sigma_i(f(x, y)) \quad (x, y \in R; i < 2).$$

Sia ora $h: R \times R \rightarrow R$ la funzione $j \circ f$, essendo j la funzione di inclusione di M in R . Si ha che

$$h(x, 0) = 0 \quad (x \in R)$$

e

$$h(x, \sigma_i(y)) = j(\sigma_i(f(x, y))) = \sigma_i(j(f(x, y))) = \sigma_i(h(x, y)) \quad (x, y \in R; i < 2).$$

Si considerino la funzione $c: R \rightarrow R$ costante in 0 e, per ogni $i < 2$, la funzione

$$\psi_i = \sigma_i \circ p_2^{(2)}: R \times R \rightarrow R.$$

Esiste una ed una sola funzione $k: R \times R \rightarrow R$ tale che

$$k(x, 0) = c(x) \quad (x \in R)$$

e

$$k(x, \sigma_i(y)) = \psi_i(x, k(x, y)) \quad (x, y \in R; i < 2);$$

ovvero

$$k(x, 0) = 0 \quad (x \in R)$$

e

$$k(x, \sigma_i(y)) = \sigma_i(k(x, y)) \quad (x, y \in R; i < 2).$$

Come si osserva immediatamente tale funzione deve essere $p_2^{(2)}$. Sempre per unicità, avendo h le stesse proprietà, si ha che $j \circ f = h = p_2^{(2)}$ ed essendo $p_2^{(2)}$ suriettiva anche j risulta tale e M coincide con R .

Teorema 1.5 (ricorsione primitiva) - Sia $\mathcal{R} = (R; \sigma_0, \sigma_1; 0)$ una struttura che soddisfa la ricorsione intermedia. Siano A, B insiemi, sia $g: A \rightarrow B$ e sia $\varphi_i: A \times R \times B \rightarrow B$ ($i < 2$); allora esiste una ed una sola $f: A \times R \rightarrow B$ tale che

$$(1) \quad f(a, 0) = g(a) \quad (a \in A);$$

$$(2) \quad f(a, \sigma_i(x)) = \varphi_i(a, x, f(a, x)) \quad (a \in A; x \in R; i < 2).$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $g': A \rightarrow R \times B$ definita da

$$g'(a) = (0, g(a)) \quad (a \in A);$$

si consideri inoltre, per ogni $i < 2$, la funzione $\psi_i: A \times (R \times B) \rightarrow R \times B$ definita da

$$\psi_i(a, z) = (\sigma_i(p_1^{(2)}(z)), \varphi_i(a, p_1^{(2)}(z), p_2^{(2)}(z))) \quad (a \in A; z \in R \times B).$$

Per ricorsione intermedia esiste una ed una sola $f': A \times R \rightarrow R \times B$ tale che:

$$f'(a, 0) = g'(a) \quad (a \in A)$$

e

$$f'(a, \sigma_i(x)) = \psi_i(a, f'(a, x)) \quad (a \in A; x \in R; i < 2).$$

Sia $f = p_2^{(2)} \circ f': A \times R \rightarrow B$; si ha che

$$f(a, 0) = p_2^{(2)}(f'(a, 0)) = p_2^{(2)}(g'(a)) = g(a) \quad (a \in A);$$

inoltre per ogni $a \in A$, per ogni $x \in R$ e per ogni $i < 2$

$$f(a, \sigma_i(x)) = p_2^{(2)}(f'(a, \sigma_i(x))) = p_2^{(2)}(\psi_i(a, f'(a, x))) = \varphi_i(a, p_1^{(2)}(f'(a, x)), p_2^{(2)}(f'(a, x)))$$

ovvero

$$(3) \quad f(a, \sigma_i(x)) = \varphi_i(a, p_1^{(2)}(f'(a, x)), f(a, x)) \quad (a \in A; x \in R; i < 2).$$

Sia $a \in A$, si dimostra per induzione su x che

$$p_1^{(2)}(f'(a, x)) = x.$$

Se $x = 0$ si ha che

$$p_1^{(2)}(f'(a, x)) = p_1^{(2)}(f'(a, 0)) = p_1^{(2)}(g'(a)) = 0.$$

Se l'asserto vale per x ed è $i < 2$ allora

$$p_1^{(2)}(f'(a, \sigma_i(x))) = p_1^{(2)}(\psi_i(a, f'(a, x))) = \sigma_i(p_1^{(2)}(f'(a, x))) = \sigma_i(x).$$

Dalla (3) segue dunque che

$$f(a, \sigma_i(x)) = \varphi_i(a, x, f(a, x)) \quad (a \in A; x \in R; i < 2).$$

Dimostriamo ora che f è unica ad avere le proprietà (1) e (2).

Sia infatti $h: A \times R \rightarrow B$ avente le stesse proprietà e definiamo $h': A \times R \rightarrow R \times B$ in

modo tale che

$$h'(a,x) = (x, h(a,x)) \quad (a \in A; x \in R).$$

Si ha che

$$h'(a,0) = (0, h(a,0)) = (0, g(a)) = g'(a) \quad (a \in A),$$

inoltre per ogni $i < 2$, $a \in A$ e $x \in R$

$$h'(a, \sigma_i(x)) = (\sigma_i(x), h(a, \sigma_i(x))) = (\sigma_i(x), \varphi_i(a, x, h(a, x)))$$

dunque

$$h'(a, \sigma_i(x)) = \psi_i(a, (x, h(a, x))) = \psi_i(a, h'(a, x))$$

da cui $h' = f'$ e

$$f = p_2^{(2)} \circ f' = p_2^{(2)} \circ h' = h.$$

Mostriamo ora che le proprietà di ricorsione sono tutte equivalenti o, meglio, che una struttura soddisfa una di tali proprietà se e solo se soddisfa tutte le altre.

Teorema 1.6 - Una struttura $\mathcal{R} = (R; \sigma_0, \sigma_1; 0)$ soddisfacente la ricorsione primitiva soddisfa anche la ricorsione semplice.

DIMOSTRAZIONE

Sia $(A; \varphi_0, \varphi_1; a)$ una struttura simile ad $\mathcal{R}$; sia $g: R \rightarrow A$ la funzione costante in a e, per ogni $i < 2$, sia $\psi_i: R \times R \times A \rightarrow A$ la funzione definita da

$$\psi_i(x, y, a) = \varphi_i(a) \quad (x, y \in R; a \in A).$$

Per ricorsione primitiva esiste una ed una sola $f': R \times R \rightarrow A$ tale che

$$f'(x, 0) = g(x) = a \quad (x \in R)$$

e

$$f'(x, \sigma_i(y)) = \psi_i(x, y, f'(x, y)) = \varphi_i(f'(x, y)) \quad (x, y \in R, i < 2).$$

Sia ora $f: R \rightarrow A$ definita da

$$f(x) = f'(0, x) \quad (x \in R).$$

Allora

$$(1) \quad f(0) = f'(0, 0) = a$$

e

$$(2) \quad f(\sigma_i(x)) = f'(0, \sigma_i(x)) = \varphi_i(f'(0, x)) = \varphi_i(f(x)) \quad (x \in R, i < 2).$$

Per la dimostrazione dell'unicità si supponga che $h: R \rightarrow A$ abbia le stesse proprietà di f . Sia $h': R \times R \rightarrow A$ tale che

$$h'(x, y) = h(y) \quad (x, y \in R).$$

Allora

$$h'(x, 0) = h(0) = a \quad (x \in R)$$

e

$$h'(x, \sigma_i(y)) = h(\sigma_i(y)) = \varphi_i(h(y)) = \varphi_i(h'(x, y)) \quad (x, y \in R, i < 2)$$

da cui, per unicità, si ha $h' = f'$ e, per ogni $x \in R$,

$$f(x) = f'(0, x) = h'(0, x) = h(x)$$

ovvero $f = h$.

Si è dimostrato, dunque, che per una struttura $\mathcal{R} = (R; \sigma_0, \sigma_1; 0)$ le tre proprietà di ricorsione sono equivalenti. Mostriamo ora che queste proprietà sono equivalenti anche a quella di essere un albero binario libero.

Teorema 1.7 - Una struttura $\mathcal{R} = (R; \sigma_0, \sigma_1; 0)$ soddisfacente una (le) proprietà di ricorsione è un albero binario libero.

DIMOSTRAZIONE

Proviamo la validità degli assiomi (A1)-(A4).

- $\forall_{i < 2} \sigma_i$ è iniettiva

Si considerino infatti la funzione $g: R \rightarrow R$ costante in 0 e le funzioni

$$\psi_0, \psi_1: R \times R \times R \rightarrow R$$

coincidenti con la funzione $p_2^{(3)}$. Per ricorsione primitiva esiste una ed una sola

$$f: R \times R \rightarrow R$$

tale che

$$f(x, 0) = g(x) = 0 \quad (x \in R)$$

e

$$f(x, \sigma_i(y)) = \psi_i(x, y, f(x, y)) = y \quad (x, y \in R, i < 2)$$

Sia ora $\sigma_i(x) = \sigma_j(y)$ per qualche $x, y \in R$. Allora

$$f(0, \sigma_i(x)) = f(0, \sigma_j(y))$$

ovvero $x = y$.

- $\forall_{x, y \in R} \forall_{i, j < 2} (\sigma_i(x) = \sigma_j(y) \Rightarrow i = j)$

Sia infatti $A = \{0, 1\}$ e siano $\varphi_0: A \rightarrow A$ la funzione costante in 0 e $\varphi_1: A \rightarrow A$ la funzione costante in 1. Per ricorsione semplice si ha che esiste una ed una sola $f: R \rightarrow A$ tale che

$$f(0) = 0$$

e

$$f(\sigma_i(x)) = \varphi_i(f(x)) = i \quad (x \in R, i < 2).$$

Supposto ora che per $i, j < 2$ e per $x, y \in R$ sia

$$\sigma_i(x) = \sigma_j(y)$$

si ha

$$f(\sigma_i(x)) = f(\sigma_j(y))$$

da cui

$$i = j.$$

- $\forall_{i < 2} 0 \notin \sigma_i[R]$

Sia infatti $A = \{0,1\}$ e siano $\varphi_0, \varphi_1: A \rightarrow A$ coincidenti con la funzione costante in 1. Per ricorsione semplice esiste una ed una sola $f: R \rightarrow A$ tale che

$$f(0) = 0$$

e

$$f(\sigma_i(x)) = \varphi_i(f(x)) = 1 \quad (x \in R, i < 2)$$

Dunque non può essere $0 = \sigma_i(x)$ per qualche i e x .

Infine per il Lemma 1.4 si ha che vale la proprietà **(A4)** per $\mathcal{R}$.

E' ora possibile dimostrare che la teoria che ha per assiomi **(A1)**-**(A4)** è categorica ovvero che, *se esiste*, è unica (a meno di isomorfismi), una struttura di albero binario libero.

Teorema 1.8 - Due strutture $\mathcal{R} = (R; \sigma_0, \sigma_1; 0)$ e $\mathcal{R}' = (R'; \xi_0, \xi_1; 0')$ di albero binario libero sono isomorfe.

DIMOSTRAZIONE

Siano $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ come nelle ipotesi; per ricorsione semplice di $\mathcal{R}$ applicata a $\mathcal{R}'$ esiste una ed una sola funzione $f: R \rightarrow R'$ tale che:

$$(1) \quad f(0) = 0'$$

e

$$(2) \quad f(\sigma_i(x)) = \xi_i(f(x)) \quad (x \in R; i < 2).$$

Dunque, come già osservato, la funzione f è un omomorfismo tra le strutture $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$.

Rimane da dimostrare che f è invertibile.

Per ricorsione semplice di $\mathcal{R}'$ applicata a $\mathcal{R}$ esiste una ed una sola $f': R' \rightarrow R$ tale che:

$$f'(0') = 0$$

e

$$f'(\xi_i(x')) = \sigma_i(f'(x')) \quad (x' \in R'; i < 2).$$

Si consideri ora $f' \circ f: R \rightarrow R$; si ha che:

$$f' \circ f(0) = 0$$

e

$$f' \circ f(\sigma_i(x)) = f'(\xi_i(f(x))) = \sigma_i(f'(f(x))) = \sigma_i(f' \circ f(x)) \quad (x \in R; i < 2).$$

Applicando la ricorsione semplice di $\mathcal{R}$ rispetto alla stessa $\mathcal{R}$ si ha, per unicità,

$$f' \circ f = \text{id}_R.$$

Analogamente si ha $f \circ f' = \text{id}_R$ e quindi f è biettiva.

Si osservi che quanto dimostrato in questo paragrafo con riferimento ad $\mathcal{R}$ è ridimostrabile senza alcuna complicazione teorica per l'albero k -rio libero.

§ 2 - LA SOMMA, L'ORDINAMENTO ED IL PRODOTTO IN $\mathcal{R}$

Definiamo ora, mediante i teoremi di ricorsione, alcune operazioni e relazioni fondamentali dell'albero binario libero. Tra queste sarà l'operazione di somma che, come vedremo, ha una definizione "ricorsiva" del tutto simile a quella della somma tra numeri naturali. Sempre in modo analogo al caso dell'albero unario si definisce una relazione d'ordine in cui diremo un elemento minore di un altro se ne esiste un terzo che sommato con il primo dà il secondo.

Meno ovvia sembra la definizione di prodotto; noi utilizzeremo quella di operazione ternaria data in [T]. La ragione principale di questa scelta dipende dal fatto che tale definizione si può ovviamente generalizzare a quella di un'operazione $(k + 1)$ -aria per l'albero k -rio libero e questo la differenzia da un'altra plausibile scelta definitoria che presenteremo e che si dimostrerà poi essere un caso particolare della precedente.

Teorema 2.1 - *Esiste una ed una sola $s: R \times R \rightarrow R$ tale che:*

$$\begin{aligned} \text{(S1)} \quad & s(x, 0) = x && (x \in R); \\ \text{(S2)} \quad & s(x, \sigma_i(y)) = \sigma_i(s(x, y)) && (x, y \in R; i < 2). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE

Si applichi il Teorema di ricorsione intermedia con $A = R = B$, e $g = \text{id}_R$ e $\varphi_i = \sigma_i \circ p_2^{(2)}$ ($i < 2$).

Indicando, come verrà fatto nel seguito, il termine $s(x, y)$ con $x + y$, le proprietà (S1) ed (S2) si possono così riscrivere:

$$\begin{aligned} \text{(S1)} \quad & x + 0 = x && (x \in R); \\ \text{(S2)} \quad & x + \sigma_i(x) = \sigma_i(x + y) && (x, y \in R; i < 2). \end{aligned}$$

Mostriamo ora qualche proprietà dell'operazione di somma; ovviamente, dalla definizione, è semplice dimostrare per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che per ogni $x, y \in R$ si ha

$$x + \sigma_i^n(y) = \sigma_i^n(x + y) \quad (i < 2)$$

essendo σ_i^n l'iterazione n -esima di σ_i .

Proposizione 2.2 - *La somma in $\mathcal{R}$ è associativa.*

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su $z \in R$ mostriamo che per ogni $x, y \in R$

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Se $z = 0$ allora

$$(x + y) + z = x + y = x + (y + 0) = x + (y + z).$$

Se l'asserto vale per z allora, per ogni $i < 2$, si ha

$$(x + y) + \sigma_i(z) = \sigma_i((x + y) + z) = \sigma_i(x + (y + z)) = x + \sigma_i(y + z) = x + (y + \sigma_i(z)).$$

Proposizione 2.3 - *Per ogni $x \in R$ si ha $0 + x = x$.*

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su x .

Se $x = 0$ l'asserto segue ovviamente da **(S1)**.

Se l'asserto vale per x ed è $i < 2$ allora

$$0 + \sigma_i(x) = \sigma_i(0 + x) = \sigma_i(x).$$

Proposizione 2.4 - *Per ogni $x \in R$ si ha che*

$$x \neq 0 \Leftrightarrow \exists!_{i < 2} \exists!_{y \in R} x = \sigma_i(y).$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo, per induzione su x , che

$$x \neq 0 \Rightarrow \exists_{i < 2} \exists_{y \in R} x = \sigma_i(y).$$

Sia, infatti,

$$M =_{def} \{x \in R \mid \exists_{i < 2} \exists_{y \in R} x = \sigma_i(y)\} \cup \{0\}.$$

Si ha che $0 \in M$ e se $x \in M$ si ha che per ogni $i < 2$ riesce $\sigma_i(x) \in M$ (anche senza l'utilizzo dell'ipotesi induttiva); per **(A4)** si ha che $M = R$.

Se fosse, per $y, y' \in R$,

$$x = \sigma_i(y) \quad \text{e} \quad x = \sigma_j(y')$$

si avrebbe che $i = j$ per **(A2)** e $y = y'$ per **(A1)**; da questo l'unicità di i e y .

Si è quindi dimostrato che

$$x \neq 0 \Rightarrow \exists!_{i < 2} \exists!_{y \in R} x = \sigma_i(y).$$

Per il viceversa se x è della forma $\sigma_i(y)$ per $i < 2$ e $y \in R$ è, ovviamente, $x \neq 0$ per (A3).

Grazie a questo risultato è possibile dare la

Definizione 2.5 - Si definiscono le funzioni π di *predecessore* e g di *genere* in modo tale che

$$\pi: R \setminus \{0\} \rightarrow R \quad \text{e} \quad g: R \setminus \{0\} \rightarrow \{0,1\}$$

e

$$g(x) = i \text{ e } \pi(x) = y \Leftrightarrow x = \sigma_i(y) \quad (x \in R \setminus \{0\}).$$

Proposizione 2.6 - In $\mathcal{R}$ vale la legge di annullamento della somma.

DIMOSTRAZIONE

Siano $x, y \in R$ con $x + y = 0$. Se fosse $y \neq 0$ si avrebbe $y = \sigma_i(z)$ per opportuni i e z da cui

$$0 = x + y = x + \sigma_i(z) = \sigma_i(x + z)$$

il che contraddice l'assioma (A3).

Dunque $y = 0$ e

$$0 = x + y = x + 0 = x.$$

Proposizione 2.7 - In $\mathcal{R}$ la somma è cancellabile.

DIMOSTRAZIONE

Mostriamo, per induzione su $x \in R$ che per ogni $y, z \in R$ si ha

$$x + y = x + z \Rightarrow y = z.$$

Se $x = 0$ l'asserto è banale in virtù della Proposizione 2.3.

Se l'asserto vale per x ed è $i < 2$ si ha che

$$\sigma_i(x) + y = \sigma_i(x) + z \Rightarrow x + (\sigma_i(0) + y) = x + (\sigma_i(0) + z) \Rightarrow \sigma_i(0) + y = \sigma_i(0) + z$$

per proprietà associativa della somma e per ipotesi induttiva. Si ha la tesi se si dimostra che, per ogni $y, z \in R$

$$\sigma_i(0) + y = \sigma_i(0) + z \Rightarrow y = z;$$

Lo dimostriamo per induzione su y .

Se $y = 0$ si supponga

$$\sigma_i(0) = \sigma_i(0) + z$$

deve essere $z = 0$ altrimenti, per la Proposizione 2.4, si avrebbe $z = \sigma_j(w)$ per j e w opportuni e quindi

$$\sigma_i(0) = \sigma_i(0) + \sigma_j(w) = \sigma_j(\sigma_i(0) + w)$$

da cui, per (A2) ed (A1),

$$0 = \sigma_i(0) + w$$

e infine, per la Proposizione 2.6,

$$\sigma_i(0) = 0$$

il che è escluso da (A3).

Se l'asserto vale per y ed è $j < 2$ sia

$$\sigma_i(0) + \sigma_j(y) = \sigma_i(0) + z;$$

per quanto osservato deve essere $z \neq 0$ dunque deve essere $z = \sigma_k(w)$ per opportuni w e k e quindi sempre sfruttando (A2) ed (A1) si ha

$$j = k \quad \text{e} \quad \sigma_i(0) + y = \sigma_i(0) + w.$$

Allora, per l'ipotesi induttiva, si ha che $y = w$ da cui

$$\sigma_j(y) = \sigma_k(w) = z.$$

Per quanto riguarda la cancellabilità destra, fissati $x, y \in R$, si dimostra, per induzione su z che

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y.$$

Ciò è ovvio se $z = 0$.

Se l'asserto vale per z ed è $i < 2$ supponiamo che sia

$$x + \sigma_i(z) = y + \sigma_i(z);$$

allora

$$\sigma_i(x + z) = \sigma_i(y + z)$$

ed essendo σ_i iniettiva

$$x + z = y + z.$$

La conclusione si ottiene per ipotesi induttiva.

Proposizione 2.8 - *La somma di $\mathcal{R}$ non è commutativa.*

DIMOSTRAZIONE

Si considerino gli elementi $\sigma_0(0)$ e $\sigma_1(0)$. Per (S2) ed (S1) si ha che:

$$\sigma_0(0) + \sigma_1(0) = \sigma_1(\sigma_0(0) + 0) = \sigma_1(\sigma_0(0))$$

e

$$\sigma_1(0) + \sigma_0(0) = \sigma_0(\sigma_1(0) + 0) = \sigma_0(\sigma_1(0)).$$

Dunque, per (A2), gli elementi considerati non commutano.

Definizione 2.9 - Sia $\leq$ la relazione binaria definita in $\mathcal{R}$ da

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists_{z \in R} x + z = y \quad (x, y \in R).$$

Proposizione 2.10 - La relazione $\leq$ è di ordine parziale e ha 0 come minimo.

DIMOSTRAZIONE

Siano $x, y, z \in R$; si ha che $0 + x = x$ dunque $0 \leq x$ e quindi 0 è un minimo.

Si ha che $x + 0 = x$ dunque $x \leq x$.

Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora, per opportuni u e v ,

$$x + u = y \quad \text{e} \quad y + v = x$$

da cui

$$x + u + v = y + v = x = x + 0;$$

per la cancellabilità e la legge di annullamento della somma si ha che

$$u = 0 = v$$

da cui

$$x = y.$$

Se $x \leq y$ e $y \leq z$ si ha che per opportuni u e v

$$x + u = y \quad \text{e} \quad y + v = z$$

da cui

$$z = (x + u) + v = x + (u + v)$$

e quindi

$$x \leq z.$$

Indicata con $<$ la relazione di ordine stretto associata a $\leq$ si ha la

Proposizione 2.11 - Per ogni $x, y \in R$ si ha che

$$x < y \Leftrightarrow \exists_{z \in R} \exists_{i < 2} x + \sigma_i(z) = y.$$

DIMOSTRAZIONE

Se $x, y \in R$ sono tali che $x < y$ allora $x \leq y$ e dunque $x + z = y$ per z opportuno. Non potendo essere $z = 0$ si ha, per la Proposizione 2.4, che $z = \sigma_i(z')$ con i e z' opportuni.

Se $x + \sigma_i(z) = y$ è, per definizione, $x \leq y$. Sia, per assurdo, $x = y$; è allora

$$x + \sigma_i(z) = y = x + 0.$$

Per la cancellabilità della somma si ha che $\sigma_i(z) = 0$ il che è escluso da **(A3)**.

Proposizione 2.12 - Per ogni $x, y \in R$ e per ogni $i < 2$ si ha che

$$x < \sigma_i(y) \Rightarrow x \leq y.$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $x < \sigma_i(y)$; per la Proposizione 2.11 si ha che

$$x + \sigma_j(z) = \sigma_i(y)$$

per opportuni j e z e quindi, per **(S2)**, riesce

$$\sigma_j(x + z) = \sigma_i(y);$$

applicando gli assiomi **(A2)** e **(A1)** si ha che

$$j = i \quad \text{e} \quad x + z = y$$

da cui $x \leq y$.

Proposizione 2.13 - Per ogni $x, y \in R$ si ha che

$$x < y \Leftrightarrow x \leq \pi(y).$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $x < y$; allora $y \neq 0$ e quindi $y = \sigma_{g(y)}(\pi(y))$ da cui, per la proposizione precedente, si ha $x \leq \pi(y)$.

Sia, viceversa,

$$x \leq \pi(y);$$

essendo $y = \pi(y) + \sigma_{g(y)}(0)$ si ha, per la Proposizione 2.11, che $\pi(y) < y$ da cui $x < y$.

Proposizione 2.14 - Per ogni $x \in R$ e per ogni $i < 2$ si ha che $\sigma_i(x)$ copre x .

DIMOSTRAZIONE

Si ha che $\sigma_i(x) = x + \sigma_i(0)$ dunque, per la Proposizione 2.11,

$$x < \sigma_i(x).$$

Inoltre se z è tale che $z < \sigma_i(x)$ per la Proposizione 2.12 è $z \leq x$.

Dunque non esiste alcun $z \in R$ tale che

$$x < z < \sigma_i(x).$$

Proposizione 2.15 - Per ogni $x \in R$ si ha che il segmento iniziale determinato da x è una catena.

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su x .

Se $x = 0$ si ha che $\{y \in R \mid y < x\} = \emptyset$ essendo 0 il minimo di $(R; \leq)$; ovviamente $\emptyset$ è una catena.

Se l'asserto vale per x sia $i < 2$ e sia, per $y \in R$,

$$y < \sigma_i(x)$$

allora, per la Proposizione 2.12, si ha che

$$y \leq x.$$

Ponendo, dunque,

$$X =_{\text{def}} \{y \in R \mid y < x\}$$

e

$$X_i =_{\text{def}} \{y \in R \mid y < \sigma_i(x)\}$$

si ha che

$$X_i \subseteq X \cup \{x\}.$$

Ora $X \cup \{x\}$ è una catena in quanto x è confrontabile con ogni elemento di X che è una catena per ipotesi induttiva. L'insieme X_i risulta dunque essere una catena essendo sottoinsieme di una catena.

Proposizione 2.16 - Per ogni $x \in R$ si ha che $\sigma_0(x)$ è inconfrontabile con $\sigma_1(x)$.

DIMOSTRAZIONE

Sia, per assurdo, $\sigma_i(x) < \sigma_{1-i}(x)$; per la Proposizione 2.12, si ha $\sigma_i(x) \leq x$ il che è escluso dalla Proposizione 2.14.

Del resto l'eguaglianza dei due elementi è esclusa da **(A2)**.

Proposizione 2.17 - Per ogni $x \in R$ si ha che

$$x \neq 0 \Rightarrow \exists!_{i < 2} \exists!_{y \in R} x = \sigma_i(0) + y.$$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo, per induzione su x , che

$$x \neq 0 \Rightarrow \exists!_{i < 2} \exists!_{y \in R} x = \sigma_i(0) + y.$$

Se $x = 0$ l'asserto è vero essendo l'ipotesi falsa.

Se l'asserto vale per x sia $i < 2$; distinguiamo due casi.

- $x = 0$

Allora

$$\sigma_i(x) = \sigma_i(0) + 0.$$

Se fosse $\sigma_i(x) = \sigma_{1-i}(0) + y$ per un qualche y dovrebbe essere $\sigma_{1-i}(0) \leq \sigma_i(x)$ il che è escluso dalla Proposizione 2.16.

- $x \neq 0$

Allora, per ipotesi induttiva, esistono j e y con $x = \sigma_j(0) + y$ da cui

$$\sigma_i(x) = \sigma_j(0) + \sigma_i(y).$$

Se

$$\sigma_i(x) = \sigma_k(0) + z$$

per qualche k e z allora deve essere $z \neq 0$ altrimenti si avrebbe $i = k$ e $x = 0$. Quindi, per opportuni h e u , si ha $z = \sigma_h(u)$ da cui

$$i = h \quad \text{e} \quad x = \sigma_k(0) + u.$$

Per l'unicità di j si ha $k = j$.

Dimostriamo ora l'unicità di y nella decomposizione di x non nullo: se

$$x = \sigma_i(0) + u \quad \text{e} \quad x = \sigma_i(0) + v$$

per la cancellabilità a sinistra della somma deve essere $u = v$.

Per quanto asserito dalla Proposizione 2.17 è possibile dare la

Definizione 2.18 - Si definiscono le funzioni f (di *first*) e bf (di *butfirst*) in modo tale che

$$f: R \setminus \{0\} \rightarrow \{\sigma_0(0), \sigma_1(0)\} \quad \text{e} \quad bf: R \setminus \{0\} \rightarrow R$$

e

$$f(x) = \sigma_i(0) \quad \text{e} \quad bf(x) = y \Leftrightarrow x = \sigma_i(0) + y \quad (x \in R \setminus \{0\}).$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $i < 2$; nel seguito il termine $\sigma_i^n(0)$ sarà indicato con la notazione n_i .

Proposizione 2.19 - Per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni $i < 2$ e per ogni $x \in R$ si ha che

$$bf^n(n_i + x) = x.$$

DIMOSTRAZIONE

Proviamo, per induzione su n , che l'asserto vale per ogni x .

Se $n = 0$ si ha che

$$bf^n(\sigma_i^n(0) + x) = 0 + x = x.$$

Se l'asserto vale per n si ha che

$$bf^{n+1}((n+1)_i + x) = bf^{n+1}(\sigma_i^{n+1}(0) + x) = bf(bf^n(n_i + \sigma_i(0) + x)) = bf(\sigma_i(0) + x) = x.$$

Proposizione 2.20 - Per ogni $x, y \in R$ con $x \neq 0$ si ha che

$$f(x+y) = f(x) \quad e \quad bf(x+y) = bf(x) + y.$$

DIMOSTRAZIONE

Si ha che $x = f(x) + bf(x)$ da cui

$$x + y = f(x) + bf(x) + y$$

ovvero

$$f(x+y) = f(x) \quad e \quad bf(x+y) = bf(x) + y.$$

Proposizione 2.21 - Per ogni $x, y \in R$ si ha che

$$x < y \Leftrightarrow \exists! \sigma_i(x) \leq y.$$

DIMOSTRAZIONE

Se $\sigma_i(x) \leq y$ allora $x < y$ essendo $x < \sigma_i(x)$ per la Proposizione 2.14.

Se $x < y$ si ha che $x + z = y$ per un opportuno $z \neq 0$. Quindi

$$z = f(z) + bf(z)$$

da cui, posto $i =_{def} g(f(z))$, si ha

$$y = x + z = x + \sigma_i(0) + bf(z) = \sigma_i(x) + bf(z)$$

e dunque

$$\sigma_i(x) \leq y.$$

Si noti che non può essere $\sigma_{1-i}(x) \leq y$ per la Proposizione 2.15 e la Proposizione 2.16.

Teorema 2.22 - Esiste una ed una sola $p: R^2 \times R \rightarrow R$ tale che:

$$(P1) \quad p((x_0, x_1), 0) = 0 \quad (x_0, x_1 \in R);$$

$$(P2) \quad p((x_0, x_1), \sigma_i(y)) = p((x_0, x_1), y) + x_i \quad (x_0, x_1, y \in R; i < 2).$$

DIMOSTRAZIONE

Si applichi il Teorema di ricorsione intermedia con $A = R^2$, $B = R$, g la funzione costante in 0 e, per ogni $i < 2$, la funzione $\varphi_i: R^2 \times R \rightarrow R$ definita da

$$\varphi_i((x_0, x_1), y) = y + x_i.$$

Ponendo, nel seguito,

$$p((x_0, x_1), y) = (x_0, x_1), y \quad (x_0, x_1, y \in R),$$

le proprietà (P1) ed (P2) si possono così riscrivere:

$$\begin{aligned}
 \text{(P1)} \quad & (x_0, x_1) \cdot 0 = 0 & (x_0, x_1 \in R); \\
 \text{(P2)} \quad & (x_0, x_1) \cdot \sigma_i(y) = (x_0, x_1) \cdot y + x_i & (x_0, x_1, y \in R; i < 2).
 \end{aligned}$$

L'esistenza del prodotto in $\mathcal{R}$, poi, può essere generalizzata a quella di un prodotto in $\mathcal{R}_k$ che indicheremo con $\cdot_k$ tale che:

$$\begin{aligned}
 \text{(P}_k\text{0)} \quad & \cdot_k: (R_k)^k \times R_k \rightarrow R_k \\
 \text{(P}_k\text{1)} \quad & (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot_k 0_k = 0_k & (x_h \in R_k; h < k); \\
 \text{(P}_k\text{2)} \quad & (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot_k \sigma_i(y) = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot_k y + x_i & (x_h, y \in R_k; i, h < k)
 \end{aligned}$$

Definiamo ora una operazione binaria in $\mathcal{R}$ che ci è sembrata, in un primo momento, la più adatta ad essere detta *prodotto*.

Per ricorsione semplice di $\mathcal{R}$ applicata alla struttura $(R; \sigma_1, \sigma_0; 0)$ esiste una ed una sola funzione $c: R \rightarrow R$ tale che

$$\text{(C1)} \quad c(0) = 0$$

e

$$\text{(C2)} \quad c(\sigma_i(x)) = \sigma_{1-i}(c(x)) \quad (x \in R; i < 2).$$

Per ricorsione intermedia avendo $A = R = B$, la funzione $g: R \rightarrow R$ costante in 0 e le funzioni $\varphi_0, \varphi_1: R \times R \rightarrow R$ definite da

$$\varphi_0(x, y) = y + x \quad (x, y \in R)$$

e

$$\varphi_1(x, y) = y + c(x) \quad (x, y \in R)$$

esiste una ed una sola $f: R \times R \rightarrow R$ tale che

$$f(x, 0) = g(x) \quad (x \in R)$$

e

$$f(x, \sigma_i(y)) = \varphi_i(x, f(x, y)) \quad (x, y \in R; i < 2).$$

Dunque, indicando per ogni $x, y \in R$ con $x \otimes y$ il termine $f(x, y)$,

$$(1) \quad x \otimes 0 = 0 \quad (x \in R),$$

$$(2) \quad x \otimes \sigma_0(y) = x \otimes y + x \quad (x, y \in R)$$

e

$$(3) \quad x \otimes \sigma_1(y) = x \otimes y + c(x) \quad (x, y \in R).$$

Dimostriamo ora la

Proposizione 2.24 - Per ogni $x, y \in R$ si ha che

$$x \otimes y = (x, c(x)) \cdot y.$$

DIMOSTRAZIONE

Si ha che per ogni $x, y \in R$

$$(x, c(x)) \cdot 0 = 0,$$

$$(x, c(x)) \cdot \sigma_0(y) = (x, c(x)) \cdot y + x$$

e

$$(x, c(x)) \cdot \sigma_1(y) = (x, c(x)) \cdot y + c(x).$$

Essendo $\otimes$ la sola operazione binaria a soddisfare le relazioni (1), (2) e (3) si ha l'asserto.

Proposizione 2.25 - Per ogni $x_0, x_1, y, z \in R$ si ha che

$$(x_0, x_1) \cdot (y + z) = (x_0, x_1) \cdot y + (x_0, x_1) \cdot z.$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su z .

Se $z = 0$ l'asserto è ovvio.

Se l'asserto vale per z ed è $i < 2$ si ha che

$$(x_0, x_1) \cdot (y + \sigma_i(z)) = (x_0, x_1) \cdot \sigma_i(y + z) = (x_0, x_1) \cdot (y + z) + x_i$$

da cui, per ipotesi induttiva,

$$(x_0, x_1) \cdot (y + \sigma_i(z)) = (x_0, x_1) \cdot y + (x_0, x_1) \cdot z + x_i = (x_0, x_1) \cdot y + (x_0, x_1) \cdot \sigma_i(z).$$

Nel seguito, per ogni $x, y \in R$, indicheremo con $x \cdot y$ il termine $(x, 0) \cdot y$.

Corollario 2.26 - Per ogni $x, y, z \in R$ si ha che

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

§ 3 - IL MONOIDE LIBERO SU DUE GENERATORI

Ci occupiamo ora di dimostrare che l'albero binario libero ha un *modello concreto* ovvero il monoide delle parole su un alfabeto di due lettere. In questo senso si formalizza l'idea intuitiva secondo cui per determinare un elemento dell'albero occorre indicare una sequenza (o, appunto, parola) di generi che conducano dalla radice 0 all'elemento in questione.

Definizione 3.1 - Si dice *monoide libero su due generatori* un monoide $\mathfrak{M} = (M; \oplus; a)$

libero nella classe dei monoidi attraverso una funzione *iniettiva* $\varphi: \{0,1\} \rightarrow M$. Ovvero tale che per ogni altro monoide $\mathfrak{M}' = (M'; \oplus'; a')$ e per ogni funzione $\psi: \{0,1\} \rightarrow M'$ esiste uno ed un unico omomorfismo $\psi': \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$ per cui $\psi' \circ \varphi = \psi$.

Noti teoremi di algebra universale dimostrano l'unicità, a meno di isomorfismi, di una struttura soddisfacente tale definizione. Inoltre, essendo la classe dei monoidi una classe equazionale, si dimostra che esiste una struttura siffatta.

Teorema 3.2 - *La struttura $(R; +; 0)$ è un monoide libero su due generatori.*

DIMOSTRAZIONE

Sia $\varphi: \{0,1\} \rightarrow R$ definita da

$$\varphi(i) = \sigma_i(0) \quad (i < 2);$$

ovviamente (per **(A2)**) φ è iniettiva. Sia ora $\mathfrak{M} = (M; \oplus; a)$ un monoide e $\psi: \{0,1\} \rightarrow M$.

Ponendo

$$\psi_0 =_{def} \psi(0) \quad e \quad \psi_1 =_{def} \psi(1)$$

definiamo, per ogni $i < 2$, la funzione $\xi_i: M \rightarrow M$ in modo tale che

$$\xi_i(m) = m \oplus \psi_i \quad (m \in M).$$

Per ricorsione semplice di $\mathcal{R}$ applicata a $(M; \xi_0, \xi_1; a)$ esiste una ed una sola

$$\psi': R \rightarrow M$$

tale che:

$$\psi'(0) = a$$

e

$$\psi'(\sigma_i(x)) = \xi_i(\psi'(x)) \quad (x \in R; i < 2).$$

Osserviamo i seguenti fatti.

- ψ' è un omomorfismo

Fissato $x \in R$, dimostriamo, per induzione su y , che

$$\psi'(x + y) = \psi'(x) \oplus \psi'(y).$$

Se $y = 0$ l'asserto è ovvio.

Se l'asserto vale per y ed è $i < 2$ si ha che

$$\psi'(x + \sigma_i(y)) = \psi'(\sigma_i(x + y)) = \xi_i(\psi'(x + y)) = \psi'(x + y) \oplus \psi_i = (\psi'(x) \oplus \psi'(y)) \oplus \psi_i$$

utilizzando la proprietà associativa di $\oplus$ riesce dunque

$$\psi'(x + \sigma_i(y)) = \psi'(x) \oplus (\psi'(y) \oplus \psi_i) = \psi'(x) \oplus \xi_i(\psi'(y)) = \psi'(x) \oplus \psi'(\sigma_i(y)).$$

- $\psi' \circ \varphi = \psi$

Infatti, per $i \in \{0,1\}$,

$$(\psi' \circ \varphi)(i) = \psi'(\sigma_i(0)) = \xi_i(\psi'(0)) = \xi_i(a) = a \oplus \psi_i = \psi_i = \psi(i).$$

Proviamo ora l'unicità di ψ' ; sia $\Phi: R \rightarrow M$ un omomorfismo tale che $\Phi \circ \varphi = \psi$. Allora

$$\Phi(0) = a$$

e, per ogni $i < 2$,

$$\Phi(\sigma_i(x)) = \Phi(x + \sigma_i(0)) = \Phi(x) \oplus \Phi(\varphi(i)) = \Phi(x) \oplus \psi(i) = \xi_i(\Phi(x)) \quad (x \in R).$$

Dunque $\Phi = \psi'$.

In algebra universale si dimostra che il monoide libero su due generatori è identificabile con l'algebra delle parole su un alfabeto di due lettere in cui con questa si intende la struttura $\mathcal{A} = (\{0,1\}^*; \bullet; \lambda)$ ove $\{0,1\}^*$ denota l'insieme delle sequenze finite di 0 e 1, l'operazione $\bullet$ è la concatenazione tra sequenze e λ è la parola vuota. In $\mathcal{A}$ sia

$$\bullet_i: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^* \quad (i < 2)$$

definita da

$$\bullet_i(p) = p \bullet i \quad (p \in \{0,1\}^*).$$

Teorema 3.3 - La struttura $\mathcal{A} = (\{0,1\}^*; \bullet_0; \bullet_1; \lambda)$ è un albero binario libero.

DIMOSTRAZIONE

Gli assiomi (A1)-(A3) sono banalmente verificati. Non resta che verificare (A4).

Si consideri la funzione $l_0: \{0,1\} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da:

$$l_0(0) = 1 = l_0(1);$$

per la libertà di $\mathcal{A}$, essendo $(\mathbb{N}; +; 0)$ un monoide, esiste una ed una sola $l: \{0,1\}^* \rightarrow \mathbb{N}$ tale che:

$$l(\lambda) = 0;$$

$$l(p \bullet q) = l(p) + l(q) \quad (p, q \in \{0,1\}^*);$$

$$l(0) = l_0(0);$$

$$l(1) = l_0(1).$$

Per ogni $i < 2$ e $p \in \{0,1\}^*$ si ha dunque che

$$l(p \bullet i) = l(p) + l_0(i) = l(p) + 1.$$

Sia ora $M \subseteq \{0,1\}^*$ tale che

$$\lambda \in M \quad \text{e} \quad \forall_{i < 2} (p \in M \Rightarrow p \bullet i \in M);$$

dimostriamo, per induzione su n , che

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \{p \in \{0,1\}^* \mid l(p) = n\} \subseteq M.$$

Infatti se $l(p) = 0$ allora $p = \lambda$ e dunque $p \in M$ per ipotesi. Si supponga che l'asserto valga per n ; siccome

$$\{p \in \{0,1\}^* \mid l(p) = n + 1\} = \{q \bullet i \mid q \in \{0,1\}^*, i < 2 \text{ e } l(q) = n\}$$

e, per ipotesi,

$$p \in M \Rightarrow \forall_{i < 2} p \bullet i \in M,$$

si ha l'asserto per $n + 1$.

Il teorema dimostrato asserisce dunque che un elemento di $\{0,1\}^*$ è un elemento dell'albero binario libero e che, con le notazioni del Paragrafo 1, comunque presi

$$i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0,1\}$$

si ha

$$i_1 i_2 i_3 \dots i_n = \lambda \bullet i_1 \bullet i_2 \bullet i_3 \bullet \dots \bullet i_n = (\dots((\lambda \bullet i_1) \bullet i_2) \bullet \dots) \bullet i_n = \sigma_{i_n}(\mathbf{K}(\sigma_{i_2}(\sigma_{i_1}(0)))\mathbf{K}).$$

Dunque, così come i numeri naturali si identificano con la loro rappresentazione unaria, è possibile identificare gli elementi dell'albero binario libero con le sequenze binarie

§ 4 - LE GENERAZIONI E GLI ORDINI ORIZZONTALI IN $\mathfrak{R}$

Quella di *generazione* è una funzione da R a valori in $\mathbb{N}$ che determina, dato un elemento $x \in R$, di quanti passi si è dovuti scendere dalla radice 0 per ottenere tale elemento; si tratta in sostanza della lunghezza della *parola* (nel senso chiarito dal paragrafo precedente), che x individua.

Le relazioni di *ordine orizzontale* che introdurremo sono due. La prima, che indicheremo con ξ , è quella studiata in [F]; questa si rende utile per lo studio dei tipi di ordine orizzontale degli alberi sradicati binari e potrebbe servire per lo studio di tali tipi nei modelli non-standard della Teoria Elementare degli Alberi Binari (EAB). La seconda relazione, che indicheremo con η , è più fine di ξ ed è utile per lo studio del quoziente canonico di un modello non-standard di EAB. In realtà, come proveremo, la prima relazione è definibile a partire dalla seconda ma, nonostante questo, dimostreremo indipendentemente le varie proprietà dell'una e dell'altra in modo che, a seconda delle esigenze, si possa scegliere quale utilizzare.

Teorema 4.1 - *Esiste una ed una sola $\rho: R \rightarrow \mathbb{N}$ tale che:*

$$(R1) \quad \rho(0) = 0;$$

$$(R2) \quad \rho(\sigma_i(x)) = \rho(x) + 1 \quad (x \in R; i < 2).$$

DIMOSTRAZIONE

Si applichi il Teorema di ricorsione semplice a $(\mathbb{N}; \varphi_0, \varphi_1; 0)$ in cui $\varphi_0 = s = \varphi_1$.

Si noti che, riguardando l'albero binario libero come algebra delle parole, la funzione ρ non è altro che la funzione l di cui al Teorema 3.3 che associa ad una parola la sua lunghezza e che, per come è stata definita, è un omomorfismo di monoidi.

Definizione 4.2 - Dato $x \in R$, si dice *generazione* di x il numero naturale $\rho(x)$.

Proposizione 4.3 - *La funzione ρ è strettamente crescente.*

DIMOSTRAZIONE

Siano infatti $x, y \in R$ con $x < y$; esistono allora i e z tali che $x + \sigma_i(z) = y$ da cui

$$\rho(y) = \rho(x + \sigma_i(z)) = \rho(x) + \rho(z) + 1$$

e quindi

$$\rho(x) < \rho(y).$$

Proposizione 4.4 - *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che*

$$\rho(n_i) = n \quad (i < 2)$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su n .

Proposizione 4.5 - *Per ogni $x, y \in R$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che*

$$\rho(x) \geq n \text{ e } x \leq y \Rightarrow \pi^n(x) \leq \pi^n(y).$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su n proviamo l'asserto per ogni x e y .

Se $n = 0$ l'asserto è ovvio.

Se l'asserto vale per n si supponga

$$\rho(x) \geq n + 1 \text{ e } x \leq y;$$

si ha che $x \neq 0$ e quindi $x = \sigma_j(z)$ per opportuni j e z . Allora

$$\rho(z) \geq n \text{ e } z < y;$$

ovvero

$$\rho(z) \geq n \text{ e } z \leq \pi(y).$$

Per ipotesi induttiva risulta

$$\pi^n(z) \leq \pi^{n+1}(y)$$

ovvero

$$\pi^{n+1}(x) \leq \pi^{n+1}(y).$$

Proposizione 4.6 - Per ogni $x, y \in R$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\rho(y) \geq n \Rightarrow \pi^n(x + y) = x + \pi^n(y).$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su n proviamo che l'asserto vale per ogni y .

Se $n = 0$ l'implicazione è banale.

Se l'asserto vale per n si supponga che sia

$$\rho(y) \geq n + 1;$$

allora deve essere $y \neq 0$ e

$$\rho(\pi(y)) \geq n.$$

Per ipotesi induttiva si ha

$$\pi^{n+1}(x + y) = \pi^{n+1}(\sigma_{g(y)}(x + \pi(y))) = \pi^n(x + \pi(y)) = x + \pi^{n+1}(y).$$

Proposizione 4.7 - Per ogni $x \in R$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $i < 2$ si ha che

$$\rho(x) \geq n \Rightarrow \sigma_i(\text{bf}^n(x)) = \text{bf}^n(\sigma_i(x)).$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su n proviamo che l'asserto vale per ogni x .

Se $n = 0$ l'asserto è evidente.

Se $n = 1$ ed è $\rho(x) \geq 1$ si ha che $x \neq 0$ da cui, per la Proposizione 2.20,

$$\text{bf}^n(\sigma_i(x)) = \text{bf}(\sigma_i(x)) = \text{bf}(x + 1_i) = \text{bf}(x) + 1_i = \sigma_i(\text{bf}(x)) = \sigma_i(\text{bf}^n(x)).$$

Se l'asserto vale per n si supponga che

$$\rho(x) \geq n + 1;$$

allora $x \neq 0$ e

$$\rho(x) = \rho(\text{f}(x) + \text{bf}(x)) = \rho(\text{f}(x)) + \rho(\text{bf}(x)) = 1 + \rho(\text{bf}(x)) \geq n + 1$$

da cui

$$\rho(\text{bf}(x)) \geq n.$$

Inoltre essendo $\rho(x) \geq 1$ si ha, per il punto precedente,

$$\text{bf}^{n+1}(\sigma_i(x)) = \text{bf}^n(\text{bf}(\sigma_i(x))) = \text{bf}^n(\sigma_i(\text{bf}(x))).$$

Applicando l'ipotesi induttiva a $\text{bf}(x)$ si ha che

$$\text{bf}^{n+1}(\sigma_i(x)) = \sigma_i(\text{bf}^n(\text{bf}(x))) = \sigma_i(\text{bf}^{n+1}(x)).$$

Proposizione 4.8 - Per ogni $x, y \in R$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\rho(x) \geq n \Rightarrow \text{bf}^n(x+y) = \text{bf}^n(x) + y.$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su y .

Se $y = 0$ l'asserto è evidente.

Se l'asserto vale per y ed è $i < 2$ si ha che

$$\text{bf}^n(x + \sigma_i(y)) = \text{bf}^n(\sigma_i(x+y))$$

ed essendo

$$\rho(x+y) = \rho(x) + \rho(y) \geq n$$

si ha, per la Proposizione 4.7,

$$\text{bf}^n(x + \sigma_i(y)) = \sigma_i(\text{bf}^n(x+y)) = \sigma_i(\text{bf}^n(x) + y) = \text{bf}^n(x) + \sigma_i(y).$$

Proposizione 4.9 - Siano $x, y, u, v \in R$ allora

$$x + y = u + v \text{ e } \rho(y) \leq \rho(v) \Rightarrow \exists_{w \in R} v = w + y$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su v .

Sia $v = 0$ e sia

$$x + y = u \text{ e } \rho(y) \leq 0;$$

allora $y = 0$ e

$$v = 0 = 0 + 0 = 0 + y.$$

Si supponga che l'asserto valga per v , sia $i < 2$ e si abbia

$$x + y = u + \sigma_i(v) \text{ e } \rho(y) \leq \rho(\sigma_i(v));$$

se $y = 0$ allora $\sigma_i(v) = \sigma_i(v) + y$ altrimenti esistono opportuni z ed i tali che $y = \sigma_j(z)$ da cui

$$\sigma_j(x+z) = \sigma_i(u+v).$$

Inoltre

$$\rho(z) < \rho(y) \leq \rho(\sigma_i(v)) = \rho(v) + 1$$

da cui

$$i = j \text{ e } x + z = u + v \text{ e } \rho(z) \leq \rho(v);$$

per ipotesi induttiva

$$v = w + z$$

e quindi

$$\sigma_i(v) = \sigma_j(w+z) = w + \sigma_j(z) = w + y.$$

Proposizione 4.10 - La cardinalità di $\{x \in R \mid \rho(x) = n\}$ è 2^n .

DIMOSTRAZIONE

Si dimostra per induzione su n .

Innanzitutto, per la Proposizione 2.4, si ha

$$\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

dunque

$$\text{card}\{x \in R \mid \rho(x) = 0\} = 1 = 2^0.$$

Supposto che l'asserto valga per n dimostriamo che

$$\rho(x) = n+1 \Leftrightarrow \exists_{i < 2} \exists_{y \in R} x = \sigma_i(y) \text{ e } \rho(y) = n.$$

Se $\rho(x) = n + 1$ si ha $x \neq 0$ e, per la Proposizione 2.4, risulta $x = \sigma_i(y)$ per i e y opportuni. Siccome

$$n + 1 = \rho(x) = \rho(y) + 1$$

si ha $\rho(y) = n$.

Il viceversa è ovvio.

Si ha quindi che

$$\{x \in R \mid \rho(x) = n + 1\} = \{\sigma_0(x) \mid x \in R \text{ e } \rho(x) = n\} \cup \{\sigma_1(x) \mid x \in R \text{ e } \rho(x) = n\}$$

e che tale unione è disgiunta. Allora

$$\text{card}\{x \in R \mid \rho(x) = n + 1\} = 2^n 2 = 2^{n+1}.$$

Sia ora $\mathcal{P}$ l'insieme delle relazioni $P \subseteq R^2$ tali che:

$$(O_{\xi 1}) \quad (\sigma_0(x), \sigma_1(x)) \in P \quad (x \in R);$$

$$(O_{\xi 2}) \quad (x, y) \in P \Rightarrow (\sigma_i(x), \sigma_j(y)) \in P \quad (x, y \in R; i, j < 2).$$

Si ha che $R^2 \in \mathcal{P}$; si pone dunque

$$\xi =_{\text{def}} \bigcap_{P \in \mathcal{P}} P$$

Lemma 4.11 - La relazione ξ è un elemento di $\mathcal{P}$.

DIMOSTRAZIONE

Ovviamente se $x \in R$

$$(\sigma_0(x), \sigma_1(x)) \in \xi$$

dato che

$$\forall_{P \in \mathcal{P}} (\sigma_0(x), \sigma_1(x)) \in P.$$

Se poi, per $x, y \in R$, si ha che $(x, y) \in \xi$
allora

$$\forall_{P \in \mathcal{P}} (x, y) \in P$$

dunque, per ogni $i, j < 2$,

$$\forall_{P \in \mathcal{P}} (\sigma_i(x), \sigma_j(y)) \in P$$

ovvero

$$\forall_{i, j < 2} (\sigma_i(x), \sigma_j(y)) \in \xi.$$

Lemma 4.12 - Per ogni $x, y \in R$ si ha che

$$(x, y) \in \xi \Leftrightarrow (\exists_{z \in R} x = \sigma_0(z) \text{ e } y = \sigma_1(z)) \text{ oppure } x \neq 0 \neq y \text{ e } (\pi(x), \pi(y)) \in \xi.$$

DIMOSTRAZIONE

Siano

$$\xi_0 =_{def} \{(x, y) \in R^2 \mid \exists_{z \in R} (x = \sigma_0(z) \text{ e } y = \sigma_1(z))\},$$

$$\xi_1 =_{def} \{(x, y) \in R^2 \mid \exists_{i, j < 2} \exists_{u, v \in R} (x = \sigma_i(u) \text{ e } y = \sigma_j(v) \text{ e } (u, v) \in \xi)\}$$

e sia

$$\xi' =_{def} \xi_1 \cup \xi_2.$$

Per il Lemma 4.11 si ha che $\xi' \subseteq \xi$.

Proviamo che ξ' soddisfa **(O ξ 1)** e **(O ξ 2)**.

Infatti se $x \in R$ allora $(\sigma_0(x), \sigma_1(x)) \in \xi_0 \subseteq \xi'$.

Supposto poi che $(x, y) \in \xi'$ si ha, per la precedente inclusione, che $(x, y) \in \xi$ il che implica, per definizione di ξ_1 , che per ogni $i, j < 2$

$$(\sigma_i(x), \sigma_j(y)) \in \xi_1 \subseteq \xi'.$$

Essendo ξ la minima relazione binaria soddisfacente **(O ξ 1)** e **(O ξ 2)** deve essere ξ contenuta in ξ' .

Corollario 4.13 - Per ogni $x \in R$ si ha che

$$(x, 0) \notin \xi \text{ e } (0, x) \notin \xi.$$

Proposizione 4.14 - La relazione ξ è antiriflessiva.

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su x dimostriamo che

$$(x,x) \notin \xi.$$

Se $x = 0$ si ha che $(x,x) \notin \xi$ per il Corollario 4.13.

Se l'asserto vale per x sia $i < 2$ e si supponga, per assurdo,

$$(\sigma_i(x), \sigma_i(x)) \in \xi.$$

Per il Lemma 4.12 devono allora esistere $u, v \in R$ e $j, k < 2$ tali che

$$\sigma_i(x) = \sigma_j(u) \quad \text{e} \quad \sigma_i(x) = \sigma_k(v) \quad \text{e} \quad (u,v) \in \xi.$$

Ne segue che

$$i = j = k \quad \text{e} \quad u = x = v$$

da cui $(x,x) \in \xi$ il che contraddice l'ipotesi induttiva.

Proposizione 4.15 - *La relazione ξ è transitiva.*

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo, per induzione su $z \in R$, che per ogni $x, y \in R$ si ha

$$(x,y) \in \xi \quad \text{e} \quad (y,z) \in \xi \Rightarrow (x,z) \in \xi.$$

Se $z = 0$ l'implicazione è vera essendo sempre falsa l'ipotesi per il Corollario 4.13.

Se l'asserto vale per z ed è $i < 2$ siano

$$(x,y) \in \xi \quad \text{e} \quad (y, \sigma_i(z)) \in \xi;$$

sempre per il Corollario 4.13 devono esistere $u, v \in \xi$ e $j, k < 2$ tali che

$$x = \sigma_j(u) \quad \text{e} \quad y = \sigma_k(v)$$

dunque

$$(\sigma_j(u), \sigma_k(v)) \in \xi \quad \text{e} \quad (\sigma_k(v), \sigma_i(z)) \in \xi;$$

distinguiamo, applicando il Lemma 4.12, tre casi.

- $k = 0, i = 1$ e $v = z$

Allora $(\sigma_j(u), \sigma_0(z)) \in \xi$ e deve essere $(u,z) \in \xi$ per il Lemma 4.12.

- $j = 0, k = 1$ e $u = v$

Allora $(\sigma_1(u), \sigma_i(z)) \in \xi$ e deve essere $(u,z) \in \xi$ per il Lemma 4.12.

- $(u,v) \in \xi$ e $(v,z) \in \xi$

Per ipotesi induttiva si ha che $(u,z) \in \xi$.

In ogni caso, dunque, si ha che $(u,z) \in \xi$ da cui

$$(x, \sigma_i(z)) = (\sigma_j(u), \sigma_i(z)) \in \xi.$$

Proposizione 4.16 - *Se $x, y \in R$ allora sono ξ -confrontabili se e solo se $\rho(x) = \rho(y)$.*

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su y dimostriamo che per ogni x

$$(x, y) \in \xi \Rightarrow \rho(x) = \rho(y).$$

Se $y = 0$ l'implicazione è sempre vera essendo l'ipotesi sempre falsa.

Se l'asserto vale per y sia $i < 2$ e sia

$$(x, \sigma_i(y)) \in \xi.$$

Per il Corollario 4.13, esistono $j < 2$ e $u \in R$ tali che $x = \sigma_j(u)$ da cui

$$(\sigma_j(u), \sigma_i(y)) \in \xi.$$

Si ha, dunque, che

$$u = y \quad \text{oppure} \quad (u, y) \in \xi$$

e in entrambi i casi, grazie all'ipotesi induttiva,

$$\rho(u) = \rho(y)$$

da cui

$$\rho(x) = \rho(\sigma_j(u)) = \rho(u) + 1 = \rho(y) + 1 = \rho(\sigma_i(y)).$$

Per induzione su n dimostriamo ora che per ogni $x, y \in R$

$$\rho(x) = n = \rho(y) \Rightarrow x \text{ } \xi\text{-confrontabile con } y.$$

Se $n = 0$ e $\rho(x) = 0 = \rho(y)$ si ha che $x = 0 = y$ da cui l'asserto.

Se l'asserto vale per n e si ha

$$\rho(x) = n + 1 = \rho(y)$$

devono esistere i, j e u, v opportuni tali che $x = \sigma_i(u)$ e $y = \sigma_j(v)$ da cui

$$\rho(u) = n = \rho(v).$$

Distinguiamo due casi.

- $u = v$

Se $i = j$ si ha che

$$x = \sigma_i(u) = \sigma_j(v) = y.$$

In caso contrario sia, per fissare le idee,

$$i = 0 \quad \text{e} \quad j = 1;$$

per **(O $_{\xi}$ 1)** si ha che

$$(x, y) = (\sigma_0(u), \sigma_1(v)) \in \xi.$$

In ogni caso, dunque, x e y sono ξ -confrontabili.

- $u \neq v$

Applicando l'ipotesi induttiva si ha che u e v sono ξ -confrontabili e siccome $u \neq v$ si ha che

$$(u, v) \in \xi \quad \text{oppure} \quad (v, u) \in \xi$$

da cui, per **(O $_{\xi}$ 2)**,

$$(x, y) = (\sigma_i(u), \sigma_j(v)) \in \xi \quad \text{oppure} \quad (y, x) = (\sigma_j(v), \sigma_i(u)) \in \xi$$

e quindi x e y sono ξ -confrontabili.

Proposizione 4.17 - Per ogni $x \in R$ si ha che $\sigma_1(x)$ ξ -copre $\sigma_0(x)$.

DIMOSTRAZIONE

Per il Lemma 4.11 si ha $(\sigma_0(x), \sigma_1(x)) \in \xi$.

Sia, per $y \in R$,

$$(\sigma_0(x), y) \in \xi$$

allora $y = \sigma_i(z)$ per opportuni i e z da cui

$$(\sigma_0(x), \sigma_i(z)) \in \xi.$$

Se $y \neq \sigma_1(x)$ deve essere, per il Lemma 4.12,

$$(x, z) \in \xi$$

da cui

$$(\sigma_1(x), \sigma_i(z)) \in \xi$$

ovvero

$$(\sigma_1(z), y) \in \xi.$$

Dunque se esistesse y tale che

$$(\sigma_0(x), y) \in \xi \quad \text{e} \quad (y, \sigma_1(x)) \in \xi$$

si avrebbe

$$(\sigma_1(x), y) \in \xi \quad \text{e} \quad (y, \sigma_1(x)) \in \xi$$

il che è escluso dalle proprietà transitiva e antiriflessiva di ξ .

Proposizione 4.18 - Per ogni $x, y \in R$ si ha che se y ξ -copre x allora $\sigma_0(y)$ ξ -copre $\sigma_1(x)$.

DIMOSTRAZIONE

Se y copre x allora, in particolare, $(x, y) \in \xi$ da cui

$$(\sigma_1(x), \sigma_0(y)) \in \xi.$$

Sia, per $z \in R$,

$$(\sigma_1(x), z) \in \xi \quad \text{e} \quad (z, \sigma_0(y)) \in \xi;$$

deve essere $z = \sigma_i(u)$ per opportuni i e u da cui

$$(\sigma_1(x), \sigma_i(u)) \in \xi \quad \text{e} \quad (\sigma_i(u), \sigma_0(y)) \in \xi.$$

Per il Lemma 4.12 si ha che

$$(x, u) \in \xi \quad \text{e} \quad (u, y) \in \xi$$

il che contraddice il fatto che y ξ -copre x .

Sia $\mathcal{Q}$ l'insieme delle relazioni $Q \subseteq R^2$ tali che

$$\mathbf{(O_{\eta 1})} \quad (\sigma_0(x), \sigma_1(x)) \in Q \quad (x \in R);$$

(O_η2) $(x,y) \in Q \Rightarrow (x,\sigma_i(y)) \in Q$ e $(\sigma_i(x),y) \in Q$ $(x,y \in R; i < 2)$.

Essendo $R^2 \in \mathcal{Q}$ si ha che $\mathcal{Q} \neq \emptyset$; sia dunque

$$\eta =_{def} \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Proposizione 4.20 - *La relazione η è un elemento di $\mathcal{Q}$.*

DIMOSTRAZIONE

Che la relazione η soddisfi la **(O_η1)** è evidente.

Sia ora $i < 2$ e si supponga che per $x, y \in R$ sia

$$(x,y) \in \eta$$

allora

$$\forall_{Q \in \mathcal{Q}} (x,y) \in Q$$

da cui, per **(O_η2)**,

$$(x,\sigma_i(y)) \in Q \text{ e } (\sigma_i(x),y) \in Q \quad (Q \in \mathcal{Q}; i < 2)$$

ovvero

$$(x,\sigma_i(y)) \in \eta \text{ e } (\sigma_i(x),y) \in \eta \quad (i < 2).$$

Proposizione 4.21 - *Per ogni $x, y \in R$ si ha che*

$$(x,y) \in \eta \Leftrightarrow \exists_{z \in R} \sigma_0(z) \leq x \text{ e } \sigma_1(z) \leq y.$$

DIMOSTRAZIONE

Sia

$$\eta' =_{def} \{(x,y) \in R^2 \mid \exists_{z \in R} \sigma_0(z) \leq x \text{ e } \sigma_1(z) \leq y\};$$

mostriamo che $\eta' \in \mathcal{Q}$.

Se $x \in R$ si ha che

$$(\sigma_0(x), \sigma_1(x)) \in \eta'$$

essendo $\leq$ una relazione riflessiva.

Siano ora $x, y \in R$ e sia $i < 2$; se

$$(x,y) \in \eta'$$

si ha che

$$\sigma_0(z) \leq x \text{ e } \sigma_1(z) \leq y$$

per un opportuno z di R . Essendo

$$x < \sigma_i(x) \text{ e } y < \sigma_i(y)$$

si ha, per la proprietà transitiva di $\leq$,

$$\sigma_0(z) \leq x \quad \text{e} \quad \sigma_1(z) \leq \sigma_i(y)$$

e

$$\sigma_0(z) \leq \sigma_i(x) \quad \text{e} \quad \sigma_1(z) \leq y$$

ovvero

$$(x, \sigma_i(y)) \in \eta' \quad \text{e} \quad (\sigma_i(x), y) \in \eta'.$$

Essendo dunque η' una relazione che soddisfa **(O $_{\eta}$ 1)** e **(O $_{\eta}$ 2)** si ha che

$$\eta \subseteq \eta'.$$

Proviamo ora, per induzione su $x \in R$, che per ogni $y \in R$ si ha

$$(x, y) \in \eta' \Rightarrow (x, y) \in \eta.$$

Se $x = 0$ l'implicazione è vera essendo la premessa sempre falsa.

Se l'asserto vale per x ed è $i < 2$ proviamo che per ogni $y \in R$ si ha

$$(\sigma_i(x), y) \in \eta' \Rightarrow (\sigma_i(x), y) \in \eta.$$

Per induzione su y .

Se $y = 0$ l'asserto è vero essendo la premessa sempre falsa.

Se l'asserto vale per y ed è $j < 2$ si supponga

$$(\sigma_i(x), \sigma_j(y)) \in \eta';$$

per un opportuno $z \in R$ si ha allora

$$\sigma_0(z) \leq \sigma_i(x) \quad \text{e} \quad \sigma_1(z) \leq \sigma_j(y);$$

distinguiamo tre casi:

- $\sigma_0(z) = \sigma_i(x)$ e $\sigma_1(z) = \sigma_j(y)$

Allora

$$(\sigma_i(x), \sigma_j(y)) = (\sigma_0(z), \sigma_1(z))$$

e quindi, per **(O $_{\eta}$ 1)**,

$$(\sigma_i(x), \sigma_j(y)) \in \eta.$$

- $\sigma_0(z) < \sigma_i(x)$

Allora si ha che

$$\sigma_0(z) \leq x \quad \text{e} \quad \sigma_1(z) \leq \sigma_j(y)$$

dunque

$$(x, \sigma_j(y)) \in \eta'$$

e, per la prima ipotesi induttiva,

$$(x, \sigma_j(y)) \in \eta$$

da cui, per **(O $_{\eta}$ 2)**,

$$(\sigma_i(x), \sigma_j(y)) \in \eta.$$

- $\sigma_1(z) < \sigma_j(y)$

Allora si ha che

$$\sigma_0(z) \leq \sigma_i(x) \quad \text{e} \quad \sigma_1(z) \leq y$$

dunque

$$(\sigma_i(x), y) \in \eta'$$

e, per la seconda ipotesi induttiva,

$$(\sigma_i(x), y) \in \eta$$

da cui, per **(O_η2)**,

$$(\sigma_i(x), \sigma_j(y)) \in \eta.$$

Nel seguito indicheremo con $<$ la relazione binaria η e per $x, y \in R$ scriveremo

$$x < y$$

in luogo di

$$(x, y) \in \eta.$$

Proposizione 4.22 - Per ogni $x, y \in R$ si ha che

$$x < y \quad \text{oppure} \quad y < x \Leftrightarrow x \not\leq y.$$

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo che sia $x < y$; per un opportuno $z \in R$ si ha che

$$\sigma_0(z) \leq x \quad \text{e} \quad \sigma_1(z) \leq y.$$

Se x e y fossero $\leq$ -confrontabili anche gli elementi $\sigma_0(z)$ e $\sigma_1(z)$ sarebbero $\leq$ -confrontabili il che è escluso. Analogamente si ragiona se $y < x$.

Mostriamo ora per induzione su $x \in R$ che

$$x \not\leq y \Rightarrow x < y \quad \text{oppure} \quad y < x.$$

Se $x = 0$ si ha che x è $\leq$ -confrontabile con y e quindi, essendo la premessa falsa, l'implicazione è sempre vera.

Se l'asserto vale per x ed è $i < 2$ si supponga

$$\sigma_i(x) \not\leq y;$$

mostriamo che

$$x \not\leq y \quad \text{oppure} \quad \sigma_{1-i}(x) \leq y.$$

Sia, per assurdo,

$$x \leq y \quad \text{e} \quad \sigma_{1-i}(x) \not\leq y;$$

distinguiamo due casi.

- $x < y$

Allora

$$\sigma_i(x) \leq y \quad \text{oppure} \quad \sigma_{1-i}(x) \leq y$$

il che è escluso dall'ipotesi $\sigma_i(x) \not\leq y$ e dall'ipotesi assurda.

- $y \leq x$

Allora

$$y \leq \sigma_i(x)$$

il che è escluso dall'ipotesi $\sigma_i(x) \not\leq y$.

Dunque

$$x \not\leq y \quad \text{oppure} \quad \sigma_{1-i}(x) \leq y;$$

distinguiamo due casi.

- $x \not\leq y$

Allora, per ipotesi induttiva,

$$x < y \quad \text{oppure} \quad y < x$$

da cui, per la Proposizione 4.20,

$$\sigma_i(x) < y \quad \text{oppure} \quad y < \sigma_i(x).$$

- $\sigma_{1-i}(x) \leq y$

Allora, per la Proposizione 4.21,

$$\sigma_i(x) < y$$

se $i = 0$; se invece $i = 1$ si ha

$$y < \sigma_i(x).$$

Proposizione 4.23 - Per ogni $x, y \in R$ si ha che

$$(x, y) \in \xi \Leftrightarrow x < y \text{ e } \rho(x) = \rho(y).$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su x proviamo che l'asserto vale per ogni y .

Se $x = 0$ l'asserto è vero essendo ogni premessa sempre falsa.

Se l'asserto vale per x sia $i < 2$ e si supponga

$$(\sigma_i(x), y) \in \xi;$$

ovviamente si ha che $\rho(\sigma_i(x)) = \rho(y)$. Dovendo essere $y \neq 0$ si ha che

$$x = \pi(y) \quad \text{e} \quad i = 0 \quad \text{e} \quad g(y) = 1$$

nel qual caso si ha che $x < y$, oppure

$$(x, \pi(y)) \in \xi$$

da cui, per ipotesi induttiva, si ha che $x < \pi(y)$ e quindi $\sigma_i(x) < y$ per **(O_{\eta}2)**.

Si supponga, per il viceversa, che

$$\sigma_i(x) < y \text{ e } \rho(\sigma_i(x)) = \rho(y).$$

Esiste allora $z \in R$ tale che

$$\sigma_0(z) \leq \sigma_i(x) \text{ e } \sigma_1(z) \leq y;$$

distinguiamo due casi.

- $\sigma_0(z) = \sigma_i(x)$

Allora si ha che $0 = i$ e che $z = x$ da cui

$$\rho(\sigma_1(x)) = \rho(y) \text{ e } \sigma_1(x) \leq y;$$

essendo ρ strettamente crescente si ha che $\sigma_1(x) = y$ da cui

$$(\sigma_i(x), y) = (\sigma_0(x), \sigma_1(x)) \in \xi.$$

- $\sigma_0(z) < \sigma_i(x)$ e $\sigma_1(z) = y$

Allora $z = \pi(y)$ e

$$\rho(z) < \rho(x) = \rho(y) - 1 = \rho(z)$$

il che è escluso.

- $\sigma_0(z) < \sigma_i(x)$ e $\sigma_1(z) < y$

Allora si ha che $x < \pi(y)$ e $\rho(x) = \rho(\pi(y))$ da cui, per ipotesi induttiva,

$$(x, \pi(y)) \in \xi$$

il che implica

$$(\sigma_i(x), y) \in \xi.$$

§ 5 - LE CATENE DI $\mathcal{R}$

Come abbiamo dimostrato, è possibile identificare gli elementi dell'albero binario libero con le *parole*, ovvero le sequenze di generi, che essi determinano. Sembra allora verosimile che le catene massimali siano identificabili con delle successioni di generi che determinino, ad ogni passo, come scendere per ottenere l'elemento successivo della catena; è quanto ci proponiamo di dimostrare.

Dimostreremo inoltre che la struttura ordinale delle catene massimali è simile a quella dei numeri naturali e che ogni catena non vuota dell'albero binario libero ha minimo; non essendo l'albero binario libero totalmente ordinato sembra questo il giusto equivalente del buon ordinamento.

Dimostreremo infine, senza utilizzare l'Assioma di Scelta, che ogni catena dell'albero binario libero è estendibile ad una catena massimale.

Si consideri una qualsiasi funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ e sia $\varphi: R \rightarrow R$ la funzione definita da

$$\varphi(x) = \sigma_{f(\rho(x))}(x) \quad (x \in R).$$

Per ricorsione semplice di $\mathcal{U}$ applicata alla struttura $(R; \varphi; 0)$ si ha che esiste una ed una sola $h_f: \mathbb{N} \rightarrow R$ tale che

$$(C1) \quad h_f(0) = 0;$$

$$(C2) \quad h_f(n+1) = \varphi(h_f(n)) = \sigma_{f(\rho(h_f(n)))}(h_f(n)) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Lemma 5.1 - Sia $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$; allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\rho(h_f(n)) = n.$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su n .

Se $n = 0$ si ha che

$$\rho(h_f(n)) = \rho(0) = 0 = n.$$

Se l'asserto vale per n si ha che

$$\rho(h_f(n+1)) = \rho(\sigma_{f(\rho(h_f(n)))}(h_f(n))) = \rho(h_f(n)) + 1 = n + 1.$$

In base a questo risultato la proprietà (C2) si può così riscrivere:

$$(C2) \quad h_f(n+1) = \sigma_{f(n)}(h_f(n)) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Proposizione 5.2 - Per ogni $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ la funzione h_f è strettamente crescente.

DIMOSTRAZIONE

Mostriamo, per induzione su $h \in \mathbb{N}$, che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$h_f(n) < h_f(n+h+1).$$

Se $h = 0$ si ha che

$$h_f(n) < \sigma_{f(n)}(h_f(n)) = h_f(n+1) = h_f(n+h+1)$$

Si supponga che l'asserto valga per h ; applicando l'ipotesi induttiva e utilizzando la base induttiva per $n+h+1$ si ha che

$$h_f(n) < h_f(n+h+1) < h_f(n+h+2).$$

Definizione 5.3 - Per ogni $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ si pone

$$C_f \stackrel{\text{def}}{=} h_f[\mathbb{N}].$$

Teorema 5.4 - Per ogni $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'insieme C_f è una catena massimale di $\mathcal{R}$.

DIMOSTRAZIONE

Anzitutto C_f è una catena dato che, per ogni n , si ha

$$h_f(n+1) > h_f(n).$$

Per dimostrare che C_f è massimale supponiamo che sia w confrontabile con ogni elemento di C_f . Distinguiamo due casi.

- $\exists_{n \in \mathbb{N}} w < h_f(n)$

Allora esiste il minimo numero naturale avente tale proprietà; lo si indichi con m . Ora

$$w < h_f(m)$$

ma non può essere $m = 0$ altrimenti si avrebbe $w < 0$ dunque

$$h_f(m-1) \leq w.$$

Siccome, essendo $h_f(m) = \sigma_{f(m-1)}(h_f(m-1))$ e tenendo conto della Proposizione 2.14,

$$h_f(m) \text{ copre } h_f(m-1)$$

non può essere $h_f(m-1) < w$ dunque

$$h_f(m-1) = w$$

da cui

$$w \in C_f.$$

- $\forall_{n \in \mathbb{N}} h_f(n) \leq w$

Si supponga, per assurdo, che sia

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} h_f(n) < w.$$

Essendo ρ strettamente crescente si avrebbe che, per ogni n ,

$$n = \rho(h_f(n)) < \rho(w)$$

il che è assurdo.

Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $h_f(n) = w$ da cui $w \in C_f$.

Teorema 5.5 - Ogni catena massimale di $\mathcal{R}$ è della forma C_f per una qualche f appartenente a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

DIMOSTRAZIONE

Sia N una catena massimale; mostriamo quanto segue.

- $0 \in N$

Infatti essendo 0 il minimo per la relazione $\leq$ è confrontabile con ogni elemento di N e N è massimale.

- $\forall_{z \in N} \exists! \sigma_i(z) \in N$
 $i < 2$

Sia $z \in N$; deve allora esistere $w \in N$ tale che

$$z < w$$

(N non ha massimo) e, per la Proposizione 2.21, deve esistere un unico $i < 2$ tale che

$$\sigma_i(z) \leq w.$$

Mostriamo che $\sigma_i(z) \in N$ provando che $\sigma_i(z)$ è confrontabile con ogni elemento di N . Sia infatti $v \in N$; se

$$v \leq z \quad \text{oppure} \quad w \leq v$$

allora v è confrontabile con $\sigma_i(z)$. Se, invece,

$$z < v < w$$

allora esiste un unico $j < 2$ tale che

$$\sigma_j(z) \leq v;$$

deve essere $i = j$ essendo l'elemento $\sigma_j(z)$ minore od uguale a w (quindi, essendo $\sigma_i(z) \leq w$, confrontabile con $\sigma_j(z)$ per la Proposizione 2.15). Dunque $\sigma_i(z)$ è, in entrambi i casi, confrontabile con v ; per l'arbitrarietà di v e per la massimalità di N si ha che

$$\sigma_i(z) \in N.$$

Si supponga ora che per $h < 2$ sia

$$\sigma_h(z) \in N$$

allora $\sigma_h(z)$ è confrontabile con $\sigma_i(z)$ e dunque $h = i$.

Sia $r: N \rightarrow \{0,1\}$ la funzione definita da

$$r(z) = i \Leftrightarrow \sigma_i(z) \in N \quad (z \in N)$$

e sia $h: N \rightarrow N$ definita da

$$h(z) = \sigma_{r(z)}(z) \quad (z \in N).$$

Per ricorsione semplice di $\mathfrak{N}$ applicata a $(N; h; 0)$, esiste una ed una sola funzione $D: \mathbb{N} \rightarrow N$ tale che:

$$(1) \quad D(0) = 0;$$

$$(2) \quad D(n+1) = h(D(n)) = \sigma_{r(D(n))}(D(n)) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Sia ora $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ tale che

$$f(n) = r(D(n)) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Allora la (2) si può così riscrivere:

$$(2') \quad D(n+1) = \sigma_{f(n)}(D(n)) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ne segue che

$$D = h_f$$

da cui

$$C_f = h_f[\mathbb{N}] = D[\mathbb{N}] \subseteq N.$$

Essendo C_f una catena massimale si ha che

$$C_f = N.$$

Teorema 5.6 - Per ogni $f, f' \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ si ha che

$$C_f = C_{f'} \Rightarrow f = f'.$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $f \neq f'$ e sia n il primo elemento di $\mathbb{N}$ tale che

$$f(n) \neq f'(n).$$

Si supponga, per fissare le idee, che sia

$$f(n) = 0 \quad \text{e} \quad f'(n) = 1;$$

si ha che

$$h_f(n+1) = \sigma_0(h_f(n))$$

e

$$h_{f'}(n+1) = \sigma_1(h_{f'}(n)).$$

Si dimostra ora, per induzione, che per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$m \leq n \Rightarrow h_f(m) = h_{f'}(m).$$

Se $m = 0$ si ha

$$h_f(m) = h_f(0) = 0 = h_{f'}(0) = h_{f'}(m)$$

e se l'asserto vale per m ed è $m+1 \leq n$ allora

$$h_f(m+1) = \sigma_{f(m)}(h_f(m)) = \sigma_{f'(m)}(h_{f'}(m)) = h_{f'}(m+1).$$

Ora se fosse $C_f = C_{f'}$ si avrebbe

$$h_f(n+1) \quad \text{confrontabile con} \quad h_{f'}(n+1)$$

dunque

$$\sigma_0(h_f(n)) \quad \text{confrontabile con} \quad \sigma_1(h_{f'}(n)) = \sigma_1(h_f(n))$$

il che è escluso dalla Proposizione 2.16.

Corollario 5.7 - Le catene massimali di $\mathcal{R}$ sono esattamente $2^{\aleph_0}$.

Sia ora N una catena massimale di $\mathcal{R}$. Dovendo essere $N = C_f$ per una qualche f appartenente a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ si pone

$$(S) \quad s(h_f(n)) = h_f(n+1) \quad (n \in \mathbb{N});$$

si ha che $s: N \rightarrow N$. Osservando poi che deve essere $0 \in N$ essendo $0 = h_f(0)$ è possibile ora enunciare il

Corollario 5.8 - Se N è una catena massimale di $\mathcal{R}$, allora le strutture

$$(N; \leq; s; 0) \quad \text{e} \quad (\mathbb{N}; \leq; s; 0)$$

sono isomorfe.

DIMOSTRAZIONE

Sia $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ tale che $N = C_f$; si ha che $h_f: \mathbb{N} \rightarrow N$ ed è ovviamente suriettiva. Per (S) si ha che h_f conserva i successivi ed essendo h_f strettamente crescente tra strutture totalmente ordinate è iniettiva e fortemente compatibile con la relazione $\leq$.

Proposizione 5.9 - *Ogni catena non vuota di $\mathcal{R}$ ha minimo.*

DIMOSTRAZIONE

Sia $T \neq \emptyset$ una catena; se $0 \in T$ l'asserto è ovvio. Altrimenti sia

$$M =_{\text{def}} \{x \in R \mid \forall_{t \in T} x < t \text{ oppure } \forall_{t \in T} x \not\leq t\}.$$

Si ha che $0 \in M$ ma $M \neq R$ perché $T \neq \emptyset$; per (A4) esistono allora $x \in R$ e $i < 2$ tali che

$$x \in M \text{ e } \sigma_i(x) \notin M$$

da cui esiste $t_1 \in T$ tale che

$$\sigma_i(x) \not\leq t_1$$

ed esiste $t_2 \in T$ tale che

$$\sigma_i(x) \leq t_2.$$

Distinguiamo due casi.

- $\sigma_i(x) \leq t_2$

Allora $x \leq t_2$.

- $t_2 < \sigma_i(x)$

Allora, per la Proposizione 2.14, si ha che $t_2 \leq x$.

In ogni caso, quindi, x è confrontabile con t_2 quindi non può essere x inconfrontabile con ogni elemento di T ; siccome $x \in M$ deve essere

$$\forall_{t \in T} x < t.$$

Ora per ogni $t \in T$ esiste $i(t) < 2$ tale che

$$\sigma_{i(t)}(x) \leq t.$$

Proviamo che per ogni $t, t' \in T$ si ha

$$i(t) = i(t').$$

Infatti se, per $t, t' \in T$, si ha $t \leq t'$ allora

$$\sigma_{i(t)}(x) \leq t \leq t' \text{ e } \sigma_{i(t')}(x) \leq t';$$

per la Proposizione 2.15, si ha che l'elemento $\sigma_{i(t)}(x)$ è confrontabile con $\sigma_{i(t')}(x)$ da cui

$$i(t) = i(t').$$

In particolare, essendo $x < t_2$, si ha che

$$\forall_{t \in T} i(t) = i$$

e quindi

$$(1) \quad \forall_{t \in T} \sigma_i(x) \leq t.$$

Non potendo essere $\sigma_i(x) < t$ per ogni $t \in T$ (dato che $\sigma_i(x) \notin M$), si ha che

$$\sigma_i(x) \in T$$

ed è, per la (1), il minimo di tale insieme.

Teorema 5.10 - *Ogni catena di $\mathcal{R}$ è estendibile ad una catena massimale.*

DIMOSTRAZIONE

Sia T una catena; l'asserto è ovvio se $T = \emptyset$.

Supponiamo ora che sia $T \neq \emptyset$; posto

$$t_0 =_{\text{def}} \min T$$

siano

$$C_1 =_{\text{def}} \{x \in R \mid x < t_0\} \quad \text{e} \quad C_2 =_{\text{def}} \{x \in R \mid \exists_{t, t' \in T} t \leq x \leq t'\};$$

ovviamente $T \subseteq C_2$.

Distinguiamo due casi.

- T ha massimo

Posto

$$t_1 =_{\text{def}} \max T,$$

sia

$$C_3 =_{\text{def}} \{\sigma_0^n(t_1) \mid n \geq 0\}.$$

Definiamo

$$C =_{\text{def}} C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

e mostriamo che C è una catena massimale.

Per la Proposizione 2.15, l'insieme C_1 è una catena; essendo poi

$$C_2 \subseteq \{x \in R \mid x \leq t_1\}$$

si ha che C_2 è una catena in virtù della stessa proposizione. Siano ora $x, y \in C_3$; per opportuni $n, m \geq 0$ si ha che

$$x = \sigma_0^n(t_1) \quad \text{e} \quad y = \sigma_0^m(t_1);$$

si supponga, per fissare le idee, che sia $n \leq m$. Allora,

$$y = \sigma_0^m(t_1) = \sigma_0^{m-n}(\sigma_0^n(t_1)) = \sigma_0^{m-n}(\sigma_0^n(t_1) + 0) = x + \sigma_0^{m-n}(0) \geq x$$

e quindi x e y sono confrontabili. Dunque anche C_3 è una catena.

Del resto essendo

$$\forall_{c \in C_1} c < t_0 \quad \text{e} \quad \forall_{c \in C_2} t_0 \leq c$$

e

$$\forall_{c \in C_2} c \leq t_1 \quad \text{e} \quad \forall_{c \in C_3} t_1 \leq c$$

si ha che C è una catena.

Sia ora x un elemento confrontabile con ogni elemento di C ; mostriamo che $x \in C$.

Essendo $t_0, t_1 \in C_2$ si ha che x è confrontabile con t_0 e t_1 . Distinguiamo quattro casi.

- $x < t_0$

Allora $x \in C_1 \subseteq C$.

- $x = t_0$

Allora $x \in C_2 \subseteq C$.

- $t_0 < x \leq t_1$

Allora $x \in C_2 \subseteq C$.

- $x > t_1$

Allora non può essere $x > \sigma_0^n(t_1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ altrimenti si avrebbe, essendo ρ strettamente crescente, che $\rho(x) > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Del resto x è confrontabile con ogni elemento del tipo $\sigma_0^n(t_1)$ essendo, per ipotesi, confrontabile con ogni elemento di C_3 ; dunque esiste n tale che $x \leq \sigma_0^n(t_1)$; sia n il minimo ad avere tale proprietà. Si noti che non può essere $n = 0$ dato che altrimenti si avrebbe $x \leq t_1$, dunque

$$\sigma_0^{n-1}(t_1) < x \leq \sigma_0^n(t_1)$$

e siccome, per la Proposizione 2.14, l'elemento $\sigma_0^n(t_1)$ copre $\sigma_0^{n-1}(t_1)$ si ha che $x = \sigma_0^n(t_1)$ e quindi $x \in C_3 \subseteq C$.

Dunque C è una catena massimale e $T \subseteq C_2 \subseteq C$.

- T non ha massimo

Poniamo

$$C =_{\text{def}} C_1 \cup C_2;$$

l'insieme C , come osservato nel caso precedente, è una catena. Mostriamo che C è massimale. Supposto che sia x confrontabile con ogni elemento di C distinguiamo tre casi.

- $x < t_0$

Allora $x \in C_1$ per definizione e dunque $x \in C$.

- $x = t_0$

Allora $x \in C_2 \subseteq C$.

- $x > t_0$

Allora deve esistere $t \in T$ tale che $x \leq t$.

Sia, per assurdo,

$$\forall_{t \in T} t < x;$$

se $y \in R$ e $y < x$ si ha che $\rho(y) < \rho(x)$ da cui

$$T \subseteq \{y \in R \mid \rho(y) < \rho(x)\};$$

ora, per la Proposizione 4.10, si ha che

$$\text{card}\{y \in R \mid \rho(y) < \rho(x)\} = 2^0 + \dots + 2^{\rho(x)-1} = 2^{\rho(x)} - 1;$$

la catena T , essendo finita, ha massimo il che è escluso dalle ipotesi fatte.

Quindi esiste t tale che $x \leq t$ ed essendo $t_0 < x$ si ha che $x \in C_2 \subseteq C$.

Esiste dunque una catena massimale C tale che $T \subseteq C$.

§ 6 - L'AZIONE DI $\mathcal{N}$ SU $\mathcal{R}$

Teorema 6.1 - *Esiste una ed una sola funzione $a: \mathbb{N} \times R \rightarrow R$ tale che*

$$(A_{z1}) \quad a(n, 0) = 0$$

e

$$(A_{z2}) \quad a(n, \sigma_i(x)) = a(n, x) + n_i \quad (n \in \mathbb{N}; x \in R; i < 2).$$

DIMOSTRAZIONE

Si applichi il Teorema di ricorsione intermedia con $A = \mathbb{N}$, $B = R$, g la funzione costante in 0 e $\varphi_i: \mathbb{N} \times R \rightarrow R$ definita da

$$\varphi_i(n, x) = x + n_i \quad (n \in \mathbb{N}; x \in R; i < 2).$$

Nel seguito, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in R$, il termine $a(n, x)$ si indicherà con $n \cdot x$; con questa convenzione le proprietà (A_{z1}) e (A_{z2}) si possono così riscrivere:

$$(A_{z1}) \quad n \cdot 0 = 0;$$

$$(A_{z2}) \quad n \cdot \sigma_i(x) = n \cdot x + n_i \quad (n \in \mathbb{N}; x \in R; i < 2).$$

Proposizione 6.2 - *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x, y \in R$ si ha*

$$n \cdot (x + y) = n \cdot x + n \cdot y.$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su y .

Se $y = 0$ l'asserto è evidente.

Se l'asserto vale per y ed è $i < 2$ si ha che

$$n(x + \sigma_i(y)) = n \cdot \sigma_i(x + y) = n(x + y) + n_i = nx + ny + n_i = nx + n \cdot \sigma_i(y).$$

Lemma 6.3 - Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ e per ogni $i < 2$ ha che

$$n \cdot m_i = (n \cdot m)_i.$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su m .

Se $m = 0$ l'asserto è evidente.

Se l'asserto vale per m ed è $i < 2$ si ha

$$n \cdot (m + 1)_i = n \cdot \sigma_i^{m+1}(0) = n \cdot \sigma_i^m(0) + n_i = n \cdot m_i + n_i = (n \cdot m)_i + n_i = \sigma_i^{nm+n}(0) = (n \cdot (m + 1))_i.$$

Proposizione 6.4 - Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in R$ si ha

$$n \cdot (m \cdot x) = (n \cdot m) \cdot x.$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su x .

Se $x = 0$ l'asserto è banale.

Se l'asserto vale per x ed è $i < 2$ si ha che

$$n \cdot (m \cdot \sigma_i(x)) = n \cdot (m \cdot x + m_i) = n \cdot (m \cdot x) + n \cdot (m_i) = (n \cdot m) \cdot x + (n \cdot m)_i = (n \cdot m) \cdot \sigma_i(x).$$

Proposizione 6.5 - Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$ e per ogni $x, y \in R$ si ha che

$$n \cdot x = n \cdot y \Rightarrow x = y.$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su y .

Sia $y = 0$ e, per assurdo, sia $x \neq 0$ con

$$n \cdot x = 0 = n \cdot y;$$

allora esistono opportuni z e i tali che $x = \sigma_i(z)$ da cui

$$0 = n \cdot x = n \cdot z + n_i$$

e quindi $\sigma_i^n(0) = 0$ il che è escluso essendo $n \neq 0$.

Se l'asserto vale per y ed è $i < 2$, sia

$$n \cdot x = n \cdot \sigma_i(y);$$

per quanto osservato, non potendo essere $x = 0$, deve essere $x = \sigma_j(z)$ per opportuni j e z da cui

$$n \cdot z + n_j = n \cdot y + n_i$$

e quindi

$$\sigma_j^n(nz) = \sigma_i^n(ny).$$

Essendo $n \neq 0$ si ha che

$$i = j \quad \text{e} \quad nz = ny;$$

per ipotesi induttiva si ha

$$z = y$$

e

$$x = \sigma_j(z) = \sigma_i(y).$$

Lemma 6.6 - Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in R$ si ha che

$$\rho(nx) = n\rho(x).$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su x .

Se $x = 0$ l'asserto è evidente.

Se l'asserto vale per x ed è $i < 2$ si ha che

$$\rho(n\sigma_i(x)) = \rho(nx + n_i) = \rho(nx) + \rho(n_i) = n\rho(x) + n = n(\rho(x) + 1) = n\rho(\sigma_i(x)).$$

Proposizione 6.7 - Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in R$ con $x \neq 0$ si ha che

$$nx = mx \Rightarrow n = m.$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $nx = mx$; si ha allora

$$n\rho(x) = m\rho(x)$$

da cui, essendo $\rho(x) \neq 0$, risulta $n = m$.

Proposizione 6.8 - Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x, y \in R$ si ha che

$$x \leq y \Rightarrow nx \leq ny.$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $x \leq y$ e sia $z \in R$ tale che $x + z = y$; si ha che, per la Proposizione 6.2,

$$ny = n(x + z) = nx + nz \geq nx.$$

Proposizione 6.9 - Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in R$ si ha che

$$x \neq 0 \Rightarrow \text{bf}^n(nx) = n\text{bf}(x).$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su x .

Se $x = 0$ l'asserto è vero essendo la premessa sempre falsa.

Se l'asserto vale per x ed è $i < 2$ si ha

$$\text{bf}^n(n \cdot \sigma_i(x)) = \text{bf}^n(n \cdot x + n_i);$$

se $x \neq 0$ si ha che

$$\rho(n \cdot x) = n \cdot \rho(x) \geq n$$

da cui, per la Proposizione 4.8 e la Proposizione 4.7,

$$\text{bf}^n(n \cdot \sigma_i(x)) = \text{bf}^n(n \cdot x) + n_i = n \cdot \text{bf}(x) + n_i = n \cdot \sigma_i(\text{bf}(x)) = n \cdot \text{bf}(\sigma_i(x)).$$

Se, invece, si ha $x = 0$ risulta

$$\text{bf}^n(n \cdot \sigma_i(x)) = \text{bf}^n(n_i) = 0 = n \cdot 0 = n \cdot \text{bf}(\sigma_i(0)) = n \cdot \text{bf}(\sigma_i(x))$$

dimostrandosi semplicemente, per induzione su n , che

$$\text{bf}^n(\sigma_i^n(0)) = 0.$$

Proposizione 6.10 - Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x, y, u \in R$ si ha che

$$n \cdot x + u = n \cdot y \Rightarrow \exists_{v \in R} u = n \cdot v$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su y .

Se $y = 0$ si ha, per la legge di annullamento della somma, che $u = 0$ e quindi l'asserto è ovvio.

Se l'asserto vale per y ed è $i < 2$ sia

$$n \cdot x + u = n \cdot \sigma_i(y)$$

allora

$$n \cdot x + u = n \cdot y + n_i.$$

Dovendo essere

$$\rho(n \cdot x + u) = n \cdot \rho(x) + \rho(u) = n \cdot \rho(y) + n,$$

si hanno due casi.

- $\rho(x) = \rho(y) + 1$

Allora $\rho(u) = 0$ da cui $u = 0$ e l'asserto è ovvio.

- $n = 0$

Allora $u = 0$ e l'asserto è ovvio.

- $\rho(x) \neq \rho(y) + 1$ e $n \neq 0$

Allora $n \cdot \rho(x) \leq n \cdot (\rho(y) + 1)$ e quindi $\rho(x) \leq \rho(y) + 1$ ovvero $\rho(x) < \rho(y) + 1$. Dunque

$$\rho(u) = n \cdot (\rho(y) + 1 - \rho(x)) \geq n = \rho(n_i);$$

per la Proposizione 4.9, esiste $w \in R$ tale che

$$u = w + n_i$$

da cui

$$n \cdot x + w = n \cdot y.$$

Per ipotesi induttiva si ha che $w = n \cdot v$ e quindi

$$u = w + n_i = n \cdot v + n_i = n \cdot \sigma_i(v).$$

Proposizione 6.11 - Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in R$ si ha che

$$n \neq 0 \text{ e } x \neq 0 \Rightarrow f(x) = f(nx).$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su x .

Se $x = 0$ l'asserto è vero essendo la premessa falsa.

Se l'asserto vale per x ed è $i < 2$ distinguiamo due casi.

- $x = 0$

Allora

$$n \cdot \sigma_i(x) = n \cdot x + n_i = n_i = \sigma_i^n(0) = \sigma_i(0) + \sigma_i^{n-1}(0)$$

da cui

$$f(n \cdot \sigma_i(x)) = \sigma_i(0) = f(\sigma_i(0)) = f(\sigma_i(x)).$$

- $x \neq 0$

Allora, per la Proposizione 2.20,

$$f(\sigma_i(x)) = f(x + \sigma_i(0)) = f(x)$$

e

$$f(n \cdot \sigma_i(x)) = f(nx + n_i) = f(nx).$$

La conclusione si ha per ipotesi induttiva.

Proposizione 6.12 - Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$ e per ogni $x, y \in R$ si ha che

$$\sigma_i(x) \leq y \Rightarrow \sigma_i(nx) \leq n \cdot y \quad (i < 2).$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su y .

Se $y = 0$ la premessa è falsa e quindi l'implicazione è sempre vera.

Se l'asserto vale per y ed è $j < 2$ si abbia

$$\sigma_i(x) \leq \sigma_j(y);$$

distinguiamo due casi.

- $\sigma_i(x) < \sigma_j(y)$

Allora $\sigma_i(x) \leq y$ da cui, per ipotesi induttiva,

$$\sigma_i(nx) \leq ny < ny + n_i = n(\sigma_i(y)).$$

- $\sigma_i(x) = \sigma_j(y)$

Allora

$$i = j \text{ e } x = y$$

da cui

$$\sigma_i(nx) = nx + \sigma_i(0) \leq nx + n_i = n(\sigma_i(x)) = n\sigma_j(y).$$

Proposizione 6.13 - Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$ e per ogni $x, y \in R$ si ha che

$$\sigma_i(nx) \leq ny \Rightarrow \sigma_i(x) \leq y \quad (i < 2).$$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su x .

Sia $x = 0$ e

$$\sigma_i(nx) = \sigma_i(0) \leq ny;$$

si ha che

$$y \neq 0 \text{ e } f(ny) = \sigma_i(0)$$

da cui, per la Proposizione 6.11,

$$f(y) = \sigma_i(0)$$

ovvero

$$\sigma_i(x) = \sigma_i(0) \leq y.$$

Valga l'asserto per x , sia $j < 2$ e si supponga

$$\sigma_i(n\sigma_j(x)) \leq ny$$

allora

$$nx + \sigma_i(n_j) \leq ny;$$

non potendo essere $y = 0$ si ha che $y = \sigma_h(z)$ per opportuni h e z da cui

$$nx + \sigma_j(0) + \sigma_i(\sigma_j^{n-1}(0)) \leq nz + n_h.$$

Essendo

$$\rho(\sigma_i(\sigma_j^{n-1}(0))) = \rho(\sigma_j^{n-1}(0)) + 1 = n = \rho(n_h)$$

si ha che, per la Proposizione 4.5 e la Proposizione 4.6,

$$\sigma_j(nx) \leq nz;$$

per ipotesi induttiva si ha

$$\sigma_j(x) \leq z$$

da cui

$$\sigma_j(x) < \sigma_h(z) = y.$$

Si ha quindi

$$\sigma_i(\sigma_j(x)) \leq y$$

infatti se fosse $\sigma_{1-i}(\sigma_j(x)) \leq y$ si avrebbe, per la Proposizione 6.12, che $\sigma_{1-i}(n\sigma_j(x)) \leq n\cdot y$ il che è escluso.

BIBLIOGRAFIA

[F] FRANCESCA FIORENZI, *Modelli non-standard della Teoria Elementare degli Alberi Binari*, Tesi di Laurea, Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Luglio 1996.

[S1] MARIO SERVI, *Albero binario e classificazione dei clan binari (numeri naturali binari e numeri interi binari)*, Quaderno n. 112 del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Giugno 1995.

[S2] MARIO SERVI, *Classificazione dei clan binari*, Quaderno n. 113 del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Giugno 1995.

[T] LAURA TOTI RIGATELLI, *Teoria ipotetico deduttiva del monoide libero su 2 generatori*, Tesi di Laurea, Dipartimento di Matematica *Ulisse Dini*, Firenze, 1966.

INDICE ANALITICO

— A —

Albero binario libero 3
 Albero k -ario libero 3
 Algebra delle parole su un alfabeto di due lettere 24
 Assioma di induzione 3
 Azione 48

— B —

Butfirst 20

— F —

First 20

— G —

Generazione 26
 Genere 14

— M —

Monoide libero su due generatori 23

— O —

Ordine
 orizzontale ξ 30
 orizzontale η 35
 verticale 16

— P —

Predecessore 14
 Prodotto
 binario $\otimes$ 22
 binario $\circ$ 23
 ternario 21

— R —

Ricorsione
 intermedia 6
 primitiva 8
 semplice 3

— S —

Somma 13
 cancellazione 15
 legge di annullamento 14
 proprietà associativa 13

INDICE DEI SIMBOLI

$\mathcal{N}$	2
$\mathcal{R}$	3
σ_0	3
σ_1	3
$\mathcal{R}_k$	3
B^A	6
$p_i^{(n)}$	7
$+$	13
π	14
g	14
$\leq$	16
f	20
bf	20
n_i	20
$\cdot$	21

$\cdot_k$	21
c	22
$\otimes$	22
$\circ$	23
$\{0,1\}^*$	25
$\bullet$	25
λ	25
$\bullet_i$	25
ρ	26
ξ	30
η	35
h_f	40
C_f	41
nx	48