Cours 4 : Les arbres binaires

Définition
Implémentation
Manipulation

Définition

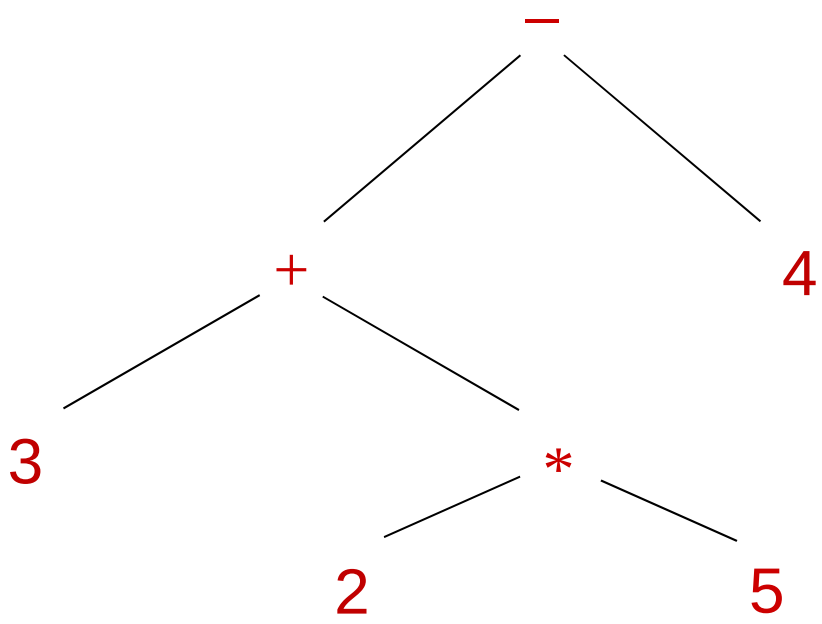
- Un arbre binaire est un arbre qui possède au maximum deux sous-arbres (d'où le *binaire*)

Deux implémentations possibles

- Version itérative
  - Un arbre binaire est constitué de nœuds
  - Chaque nœud « pointe » vers deux nœuds de l'étage inférieur
- Version récursive
  - Un arbre binaire peut être vide
  - Un arbre binaire possède un nœud (étiqueté ou pas)
  - Un arbre binaire possède deux sous-arbres « fils »

Utilisation

- Enormément d'applications, que ce soit dans le domaine informatique ou pas :
  - Expressions mathématiques : 3 + 2*5 - 4



Autres exemples

- Résultats d'un tournoi à élimination directe (tennis par exemple)
- Arborescence de *si-alors-sinon* (voir les arbres de décision pour les tris vus à la première séance)

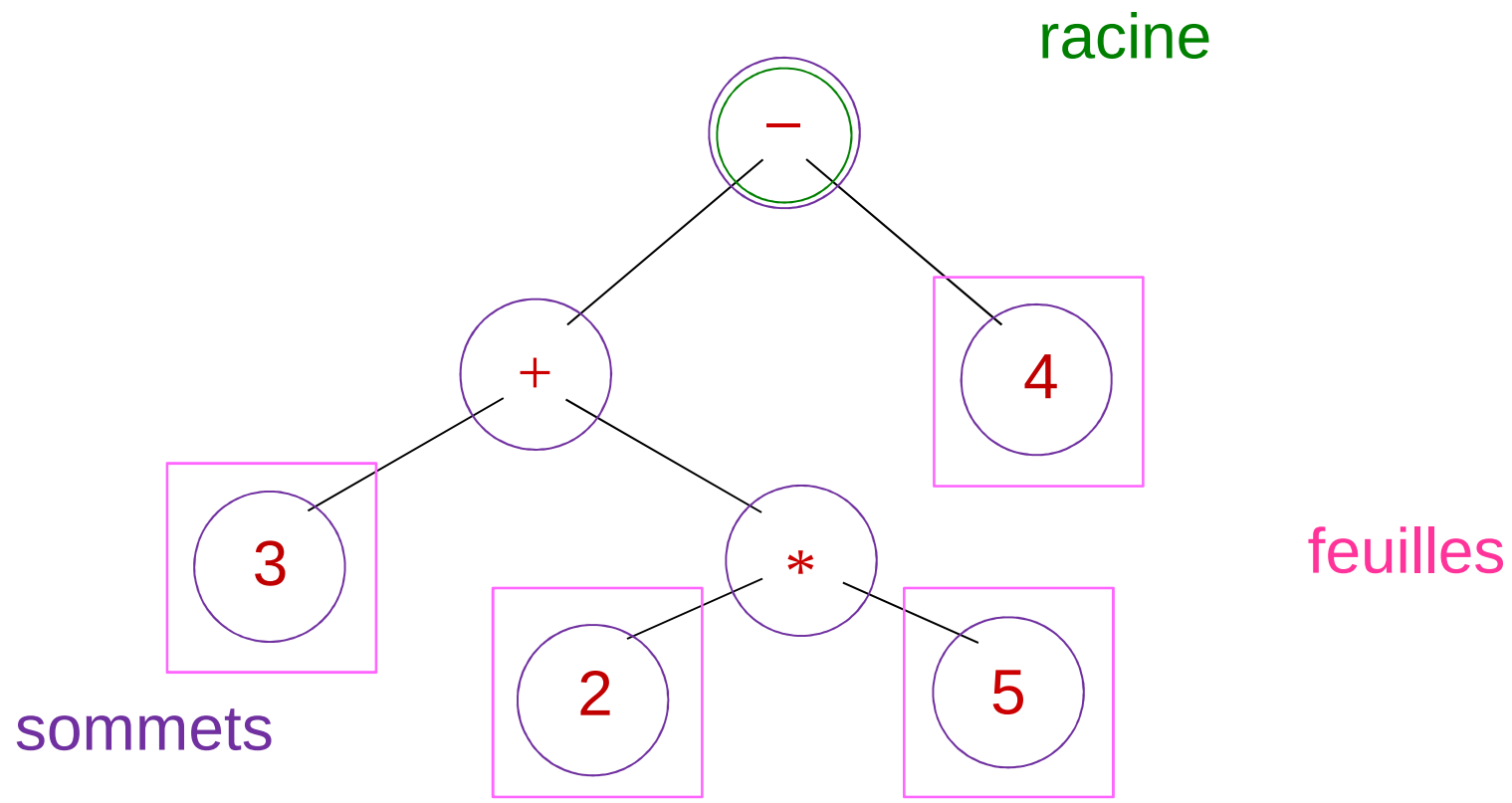
Un peu de vocabulaire

- Un arbre est constitué de *nœuds* (ou *sommets*)
- Ces sommets sont reliés par des *arcs* (ou *arêtes*) orientés : père $\rightarrow$ fils
- Il existe dans tout arbre un nœud qui n'est le point d'arrivée d'aucun arc : c'est la *racine*

Un peu de vocabulaire (2)

- Tout autre nœud est la racine d'un sous-arbre de l'arbre principal
- Un nœud qui n'est le point de départ d'aucun arc est appelé *feuille*
- Pour les arbres binaires, on distinguera de façon visuelle le fils gauche du fils droit

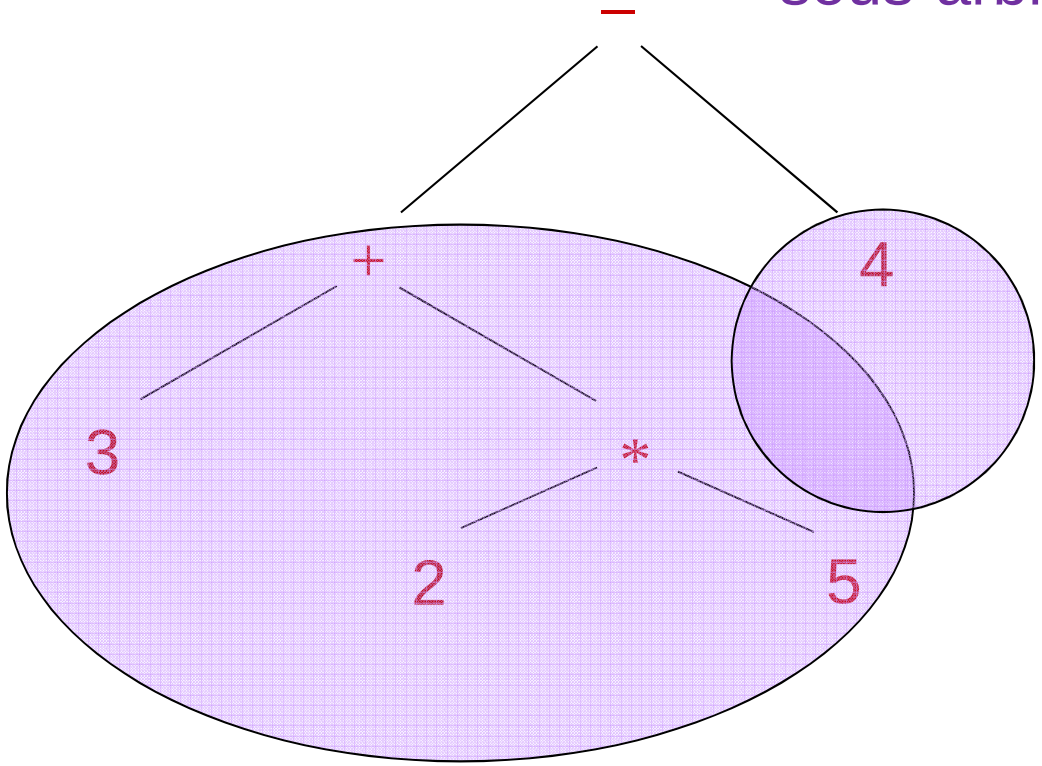
Un exemple



Un exemple

sous-arbre gauche de « – »

sous-arbre droit de « – »



Un peu de vocabulaire (3)

- La *hauteur* d'un nœud est la longueur du plus long chemin de ce nœud aux feuilles qui en dépendent plus 1
  - C'est le nombre de nœuds du chemin
  - La *hauteur d'un arbre* est la hauteur de sa racine
  - L'arbre vide a une hauteur 0
  - L'arbre réduit à une racine étiqueté a une hauteur 1

Un peu de vocabulaire (4)

- La *profondeur* d'un nœud est le nombre de nœuds du chemin qui va de la racine à ce nœud
  - La racine d'un arbre est à une profondeur 0
  - La profondeur d'un nœud est égale à la profondeur de son père plus 1
  - Si un nœud est à une profondeur *p*, tous ses fils sont à une profondeur *p*+1
- Tous les nœuds d'un arbre de même profondeur sont au même niveau

Premier traitement sur un arbre

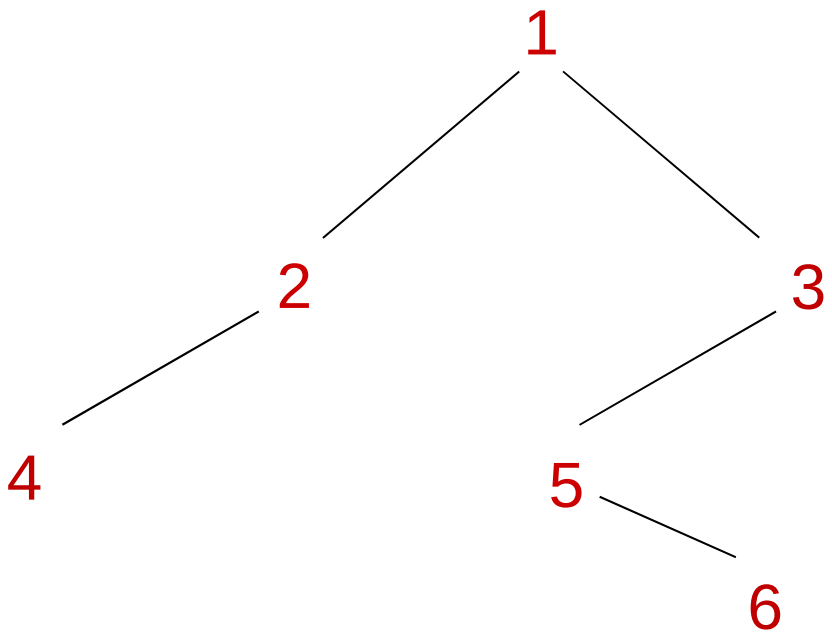
- L’affichage

- Trois façons d’afficher
  - Préfixe
  - Infixe
  - Postfixe

Affichages

- Préfixe :
  - On affiche la racine, puis le sous-arbre gauche, puis le sous-arbre droit
- Infixe :
  - On affiche le sous-arbre gauche, puis la racine, puis le sous-arbre droit
- Postfixe :
  - On affiche le sous-arbre gauche, puis le sous-arbre droit, puis la racine

Un exemple



Résultats

- Préfixe :
  - 1 2 4 3 5 6
- Infixe :
  - 4 2 1 5 6 3
- Postfixe
  - 4 2 6 5 3 1

Deuxième traitement

- Recherche d'un élément

- Au moins deux façons de faire :
  - DFS : *Depth-First Search* ou recherche en profondeur d'abord
  - BFS : *Breadth-First Search* ou recherche en largeur d'abord

DFS en détail

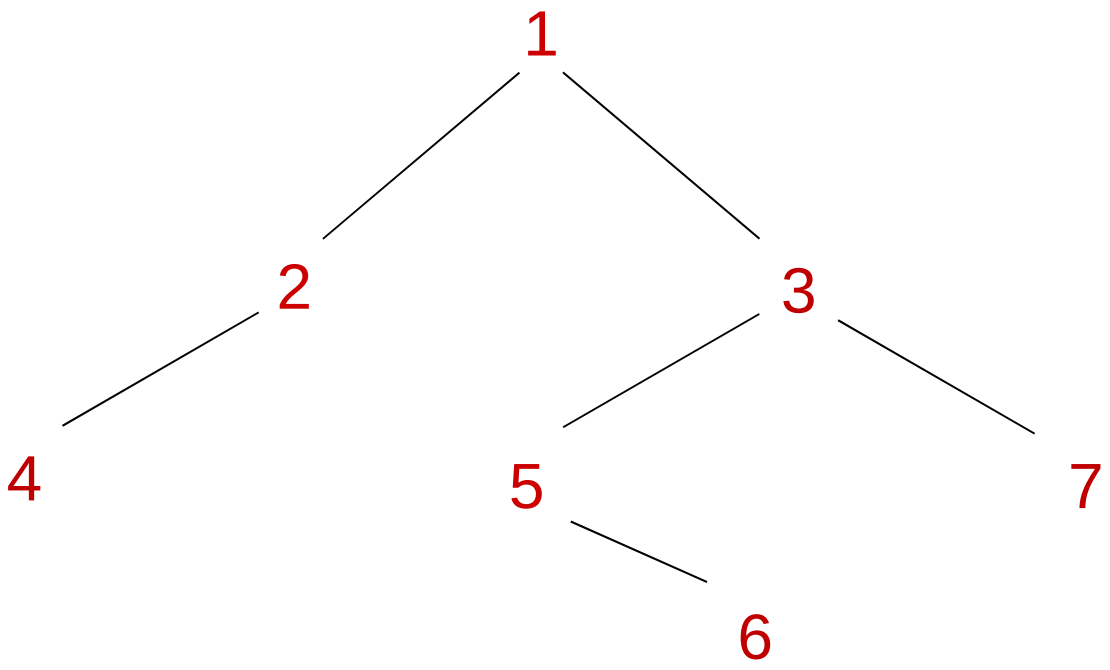
- DFS :
  - On cherche à la racine
  - S'il n'y est pas :
    - On cherche dans le fils gauche
    - Puis s'il n'était pas dans le fils gauche, on cherche dans le fils droit
- Idée : explorer à fond chaque branche avant de passer à la suivante
- On s'arrête quand on a trouvé ou qu'il n'y a plus de branches à explorer

Réflexions

- On reconnaît encore une fois un fonctionnement récursif

- Problème : si l'élément est dans le sous arbre droit de la racine, on va quand même explorer tout le sous-arbre de gauche

Exemples



Avec DFS : on cherche 4

- Racine = 1 $\rightarrow$ *non*
  - On explore le fils gauche
    - Racine = 2 $\rightarrow$ *non*
    - On explore le fils gauche
      - Racine = 4 $\rightarrow$ *TROUVÉ*

Avec DFS (2) : on cherche 3

- Racine = 1 $\rightarrow$ *non*
  - On explore le fils gauche
    - Racine = 2 $\rightarrow$ *non*
    - On explore le fils gauche
      - Racine = 4 $\rightarrow$ *non*
      - Pas de fils
    - Pas de fils droit
  - On explore le fils droit
    - Racine = 3 $\rightarrow$ *TROUVÉ*

BFS en détail

- BFS :
  - On cherche à la racine
  - Si l'élément n'y est pas :
    - On cherche dans les nœuds de profondeur 1
    - S'il n'est pas dans à la profondeur 1, on cherche à la profondeur 2
    - Etc…

Réflexions

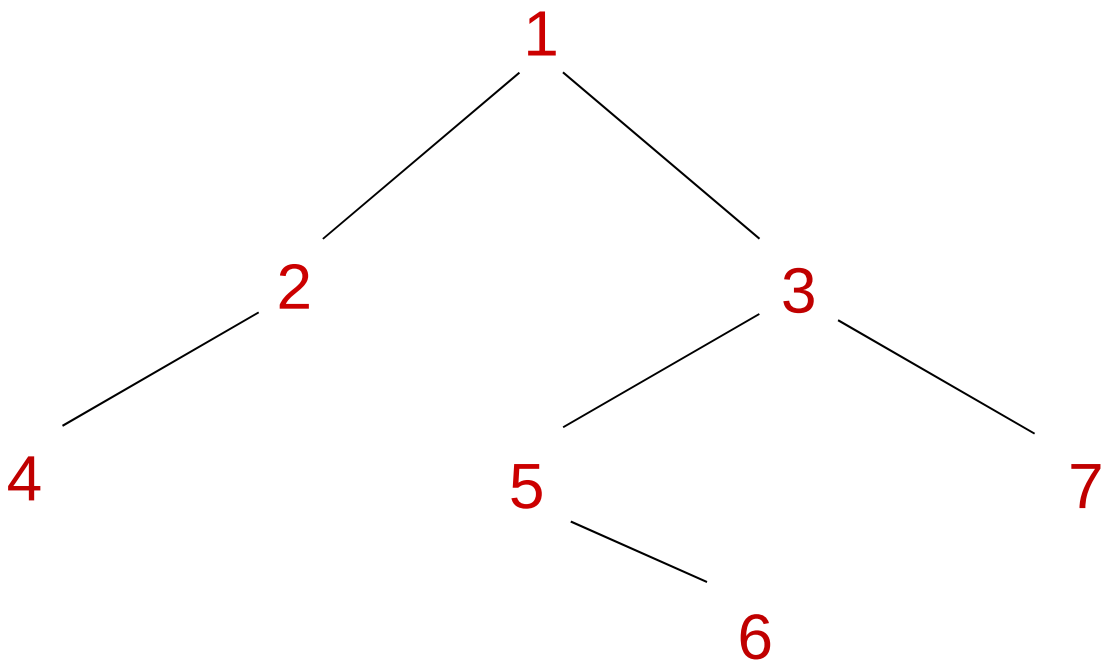
- Plutôt un fonctionnement itératif

- On va avoir besoin d'une file FIFO (ou autre structure équivalente) pour stocker les nœuds à explorer :
  - On ne peut pas « sauter » d'un nœud de profondeur *p* à un autre
  - Il faut se souvenir de la liste des nœuds à traiter

Fonctionnement de la file

- Au début, la file contient l'arbre principal
- Si la valeur n'est pas à la racine du premier arbre de la file
  - On supprime l'arbre de la file
  - On ajoute ses deux sous-arbre en fin de file s'ils ne sont pas vides
  - Et on explore l'arbre suivant, qui est le premier de la file
- On s'arrête quand on a trouvé ou que la file est vide

Exemples



Avec BFS : on cherche 3

- File = [arbre *« 1 »*]
- Valeur de la racine = 1 → *non*
- On enlève l'arbre *« 1 »* et on ajoute ses deux sous-arbres
  - File = [*sous-arbre gauche de « 1 », sous-arbre droit de « 1 »*]
  - On explore le premier : racine = 2 → *non*
  - On l'enlève et on ajoute ses sous-arbres
    - File= [*sous-arbre droit de « 1 », sous-arbre gauche de « 2 »*]
    - On explore le premier : racine = 3 → TROUVÉ

Avec BFS (2) : on cherche 4

- File = [arbre *« 1 »*]
- Valeur de la racine = 1 → *non*
- On enlève l' arbre *« 1 »* et on ajoute ses deux sous-arbres
  - File = [*s.-a. gauche de « 1 », s.-a. droit de « 1 »*]
  - On explore le premier : racine = 2 → *non*
  - On l'enlève et on ajoute ses deux sous-arbres
    - File = [*s.-a. droit de « 1 », s.-a. gauche de « 2 »*]
    - On explore le premier : racine = 3 → *non*
    - On l'enlève et on ajoute ses deux sous-arbres
      - File = [*s.-a. gauche de « 2 », s.-a. gauche de « 3 », s.-a. droit de « 3 »*]
      - On explore le premier : racine = 4 → *TROUVÉ*

Comparatif

- Avec DFS, on n’a besoin d’aucun stockage en plus mais on peut s’attarder trop longtemps dans une branche
- Avec BFS, on fonctionne par profondeur incrémentale donc on évite le piège mais on a besoin d’un stockage dont la taille augmente à chaque étape

Les ABR

- On voit que la recherche dans les arbres binaires est peu aisée
- Autre problème : où ajouter un élément ?

- Solution : les ABR ou arbres binaires de recherche

Définition

- Un *arbre binaire de recherche* (*ABR*) est un arbre binaire dans lequel chaque nœud possède une clé telle que
  - chaque nœud du sous-arbre *gauche* possède une clé inférieure ou égale à celle du nœud considéré
  - chaque nœud du sous-arbre *droit* possède une clé supérieure ou égale à celle-ci
  - (on pourra interdire ou non des clés de valeur égale)

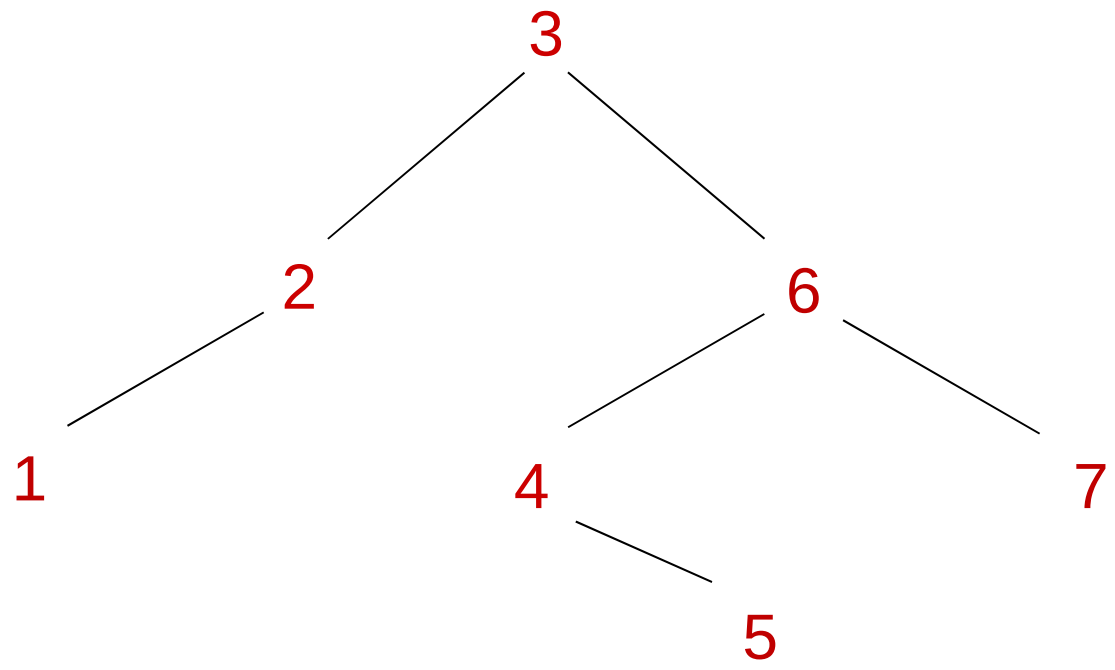
Pourquoi les problèmes sont-ils réglés ?

- Pour la recherche : à partir de la racine, on sait si on doit explorer le fils gauche ou le fils droit
  - DFS devient très efficace
- Pour l'ajout, le nouveau nœud ajouté devient une feuille
  - Ici aussi il suffit de faire une DFS en descendant systématiquement à droite ou à gauche suivant qu'on est inférieur ou supérieur à la racine

Et si on veut supprimer un nœud ?

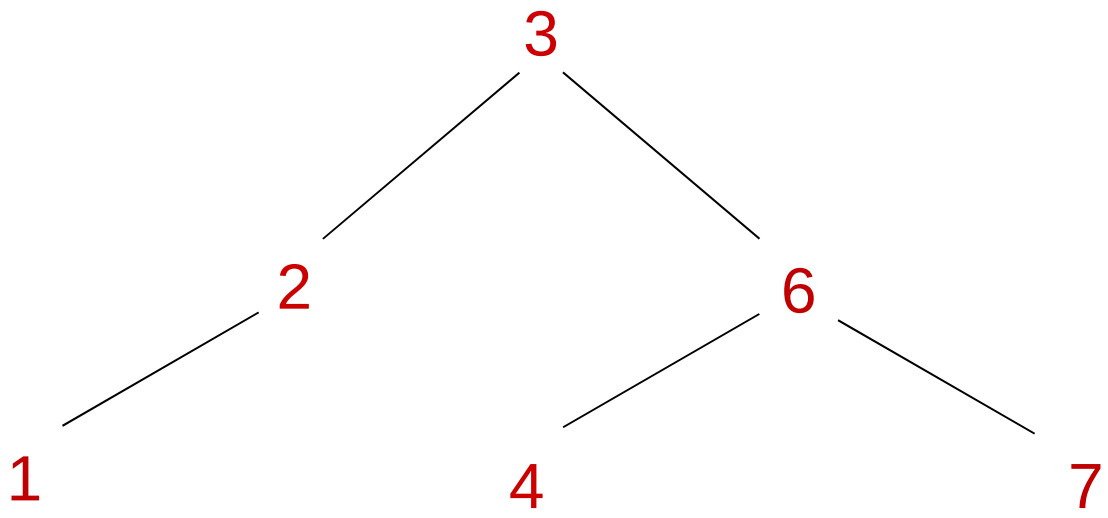
- Si c'est une feuille
  - Facile, rien à faire
  - On garde un ABR
- Sinon si c'est un nœud avec un seul s.-a.
  - On le remplace par son sous-arbre
- Sinon
  - On lui donne la valeur minimale de son sous-arbre droit et on supprime ce nœud (récursif)

Exemple

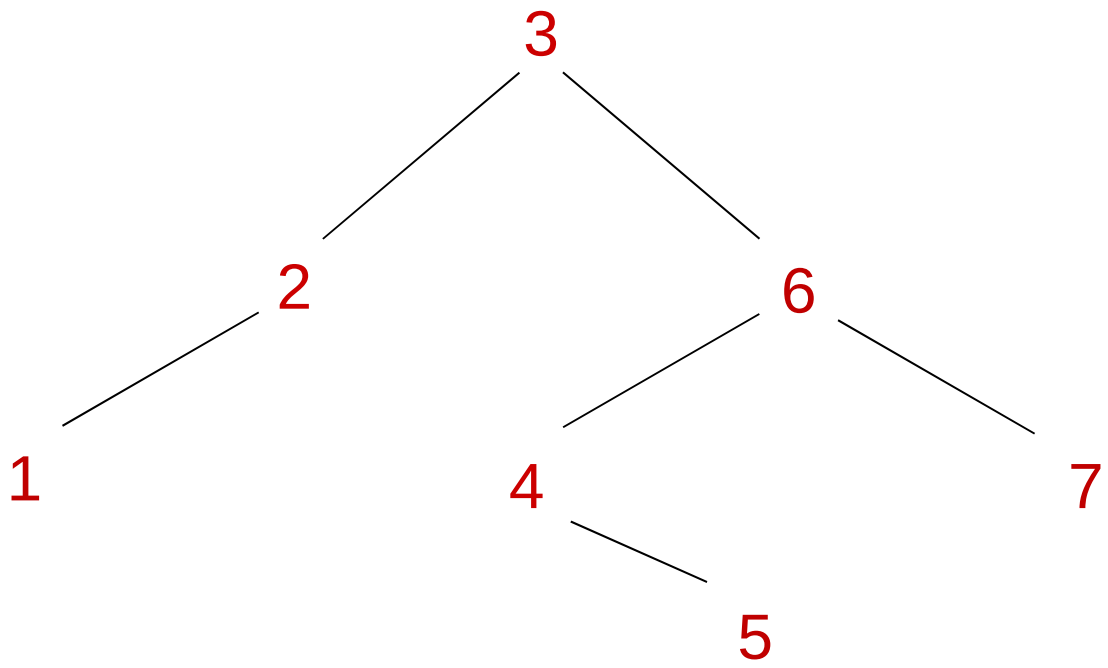


On supprime 5

On supprime 5

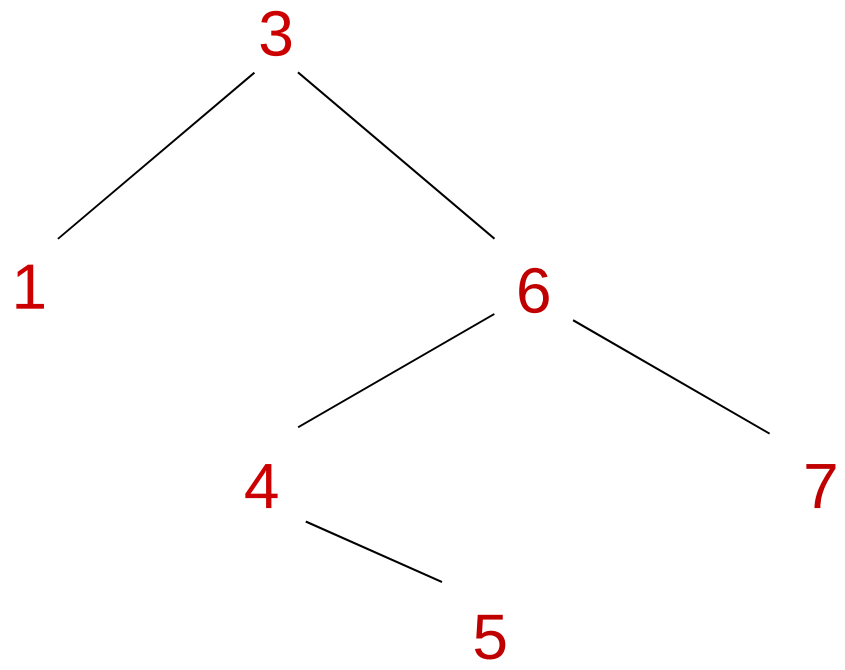


Exemple

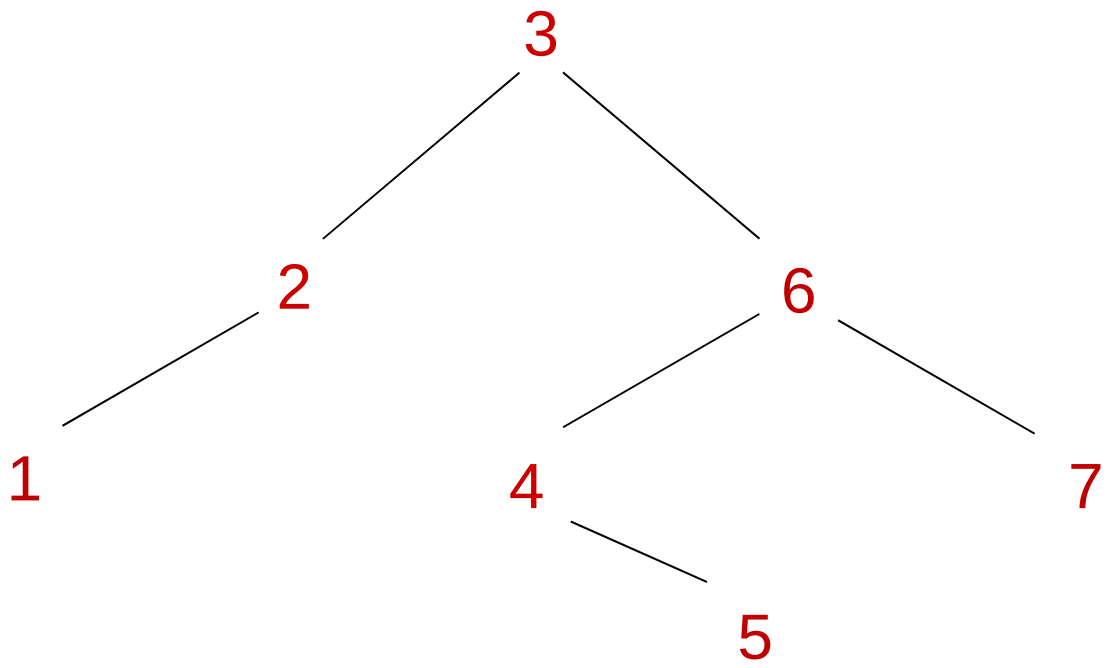


On supprime 2

On supprime 2



Exemple



On supprime 3

On supprime 3