Département INFORMATIQUE

Année 2012-2013
Premier semestre
DUT première année

CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES – CORRIGÉ

De 11h15 à 12h45, le mercredi 28 novembre 2012
Aucun document n'est autorisé, l'usage d'une calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Répondre sur le sujet.

Nom, Prénom : ____

1. Logique

Exercice 1. Soient p et q deux propositions. Le connecteur binaire $\oplus$ (appelé XOR) est défini par :

$p \oplus q$ est vrai si p ou q est vrai mais pas simultanément p et q.

(1) Écrire la table de vérité du XOR.

Correction :

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

(2) Prouver que $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

Correction :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V
V	V	F	F	F	F	F

Donc $p \oplus q$ et $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ ont la même table de vérité.

(3) Simplifier les propositions suivantes, puis indiquer les tautologies et les contradictions :

(a) $p \oplus p$;

(b) $p \oplus q$, où q est une contradiction ;

(c) $p \oplus q$, où q est une tautologie ;

(d) $p \oplus \neg p$;

Correction : On rappel que pour toutes propositions r et s :
– *si s est une tautologie alors $r \wedge s \equiv r$ et $r \vee s$ est une tautologie ;*
– *si s est une contradiction alors $r \wedge s$ est une contradiction et $r \vee s \equiv r$.*

(a)

$$\begin{aligned} p \oplus p &\equiv (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge p) \\ &\equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg p) \\ &\equiv \underbrace{p \wedge \neg p}_{\text{contradiction}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} p \oplus q &\equiv (p \wedge \underbrace{\neg q}_{\text{tautologie}}) \vee (\neg p \wedge q) \\ &\equiv p \vee \underbrace{(\neg p \wedge q)}_{\text{contradiction}} \\ &\equiv p \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} p \oplus q &\equiv (p \wedge \underbrace{\neg q}_{\text{contradiction}}) \vee (\neg p \wedge q) \\ &\equiv \underbrace{(p \wedge \neg q)}_{\text{contradiction}} \vee (\neg p \wedge q) \\ &\equiv \neg p \wedge \underbrace{q}_{\text{tautologie}} \\ &\equiv \neg p \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} p \oplus \neg p &\equiv (p \wedge \neg\neg p) \vee (\neg p \wedge \neg p) \\ &\equiv (p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg p) \\ &\equiv \underbrace{p \vee \neg p}_{\text{tautologie}} \end{aligned}$$

(4) Prouver que :

(a) $p \oplus q \equiv (p \vee q) \oplus (p \wedge q)$;

(b) $\neg(p \oplus q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

Correction :

(a)

$$\begin{aligned} (p \vee q) \oplus (p \wedge q) &\equiv [(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)] \vee [\neg(p \vee q) \wedge (p \wedge q)] \\ &\equiv [(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee [(\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge q)] \\ &\equiv \left[(\underbrace{p \wedge \neg p}_{\text{contradiction}}) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (\underbrace{q \wedge \neg q}_{\text{contradiction}}) \right] \vee \underbrace{(\neg p \wedge p \wedge \neg q \wedge q)}_{\text{contradiction}} \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \\ &\equiv p \oplus q \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \neg(p \oplus q) &\equiv \neg\left[(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)\right] \\ &\equiv [\neg(p \wedge \neg q)] \wedge [\neg(\neg p \wedge q)] \\ &\equiv (\neg p \vee \neg\neg q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q) \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \\ &\equiv (\underbrace{\neg p \wedge p}_{\text{contradiction}}) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (\underbrace{q \wedge \neg q}_{\text{contradiction}}) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q). \end{aligned}$$

Exercice 2. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels. On dit que n est le *successeur* de m si $n = m + 1$.

Écrire les phrases suivantes en utilisant les quantificateurs et les connecteurs logiques :

(a) Le 0 n'est successeur d'aucun nombre ;

(b) Tout entier naturel différent de 0 est successeur d'un nombre ;

(c) Si les successeurs de deux nombres coïncident, alors les deux nombres coïncident ;

(d) La somme de tout entier naturel n avec 0 donne n ;

(e) La somme d'un nombre n avec le successeur d'un nombre m est le successeur du nombre $n + m$;

(f) Le produit de tout entier naturel avec 0 donne 0 ;

(g) Le produit d'un nombre n avec le successeur d'un nombre m est la somme du nombre $n \cdot m$ avec n.

Correction :

(a) $\neg(\exists n \in \mathbb{N})(n + 1 = 0)$ *;*

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})\,[\neg(n = 0) \Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N})(m + 1 = n)]$. *Aussi* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists m \in \mathbb{N})(m + 1 = n)$ *;*

(c) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\,[(n + 1 = m + 1) \Rightarrow (n = m)]$ *;*

(d) $(\forall n \in \mathbb{N})(n + 0 = n)$ *;*

(e) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\,[n + (m + 1) = (n + m) + 1]$ *;*

(f) $(\forall n \in \mathbb{N})(n \cdot 0 = 0)$ *;*

(g) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\,[n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n]$ *;*

2. **Raisonnement par récurrence**

Exercice 3. Soit $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ la somme des premiers n nombres impairs.

(1) Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

Correction :

– *Base de la récurrence : Si* $n = 1$ *on a* $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 = 1^2$. *Donc l'assertion est vraie pour* $n = 1$.

– *Étape inductive : Soit notre assertion vraie pour* $n \in \mathbb{N}^*$. *C'est-à-dire :* $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$. *On a alors :*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2n + 2 - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Donc l'assertion est vraie pour $n + 1$.

Par récurrence, on a que $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Retrouver le même résultat en utilisant l'identité $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Correction : On a que :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i-1) &= \left[\sum_{i=1}^{n}(2i-1) + \sum_{i=1}^{n} 2i\right] - \sum_{i=1}^{n} 2i \\
&= \sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^{n} 2i \\
&= \sum_{i=1}^{2n} i - \left(2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= \frac{2n(2n+1)}{2} - \left(2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= n(2n+1) - n(n+1) = 2n^2 + n - n^2 - n = n^2.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $\sum_{i=1}^{n} i^3$ la somme des premiers n cubes.

Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Correction :

- *Base de la récurrence : Si* $n = 1$ *on a* $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 = \left[\frac{1\cdot 2}{2}\right]^2$. *Donc l'assertion est vraie pour* $n = 1$.
- *Étape inductive : Soit notre assertion vraie pour* $n \in \mathbb{N}^*$. *C'est-à-dire :* $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. *On a alors :*

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \\
&= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.
\end{aligned}
$$

Donc l'assertion est vraie pour $n + 1$.

Par récurrence, on a que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

3. **Suites récurrentes**

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 2$.

Correction :

- *Base de la récurrence : Si $n = 0$ on a $u_0 = 2$ par définition. Donc l'assertion est vraie pour $n = 0$.*
- *Étape inductive : Soit notre assertion vraie pour $n \in \mathbb{N}$. C'est-à-dire : $u_n = 2$. On a alors :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 + \frac{1}{4}u_n^2 \\ &= 1 + \frac{1}{4}2^2 = 1 + \frac{1}{4}4 = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Donc l'assertion est vraie pour $n + 1$.

Par récurrence, on a que $u_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3 \cdot \sum_{i=0}^{n} u_i + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 4.

(2) Calculer $\sum_{i=6}^{24} u_i$.

Correction :

(1) *On doit prouver que pour tout entier n, on a $u_{n+1} = 4u_n$.*

– *Base de la récurrence : Si $n = 0$ on a $u_1 = 3 \cdot \sum_{i=0}^{0} u_i + 1 = 3u_0 + 1 = 4 = 4u_0$. Donc l'assertion est vraie pour $n = 0$.*

– *Étape inductive : Soit notre assertion vraie pour $n \in \mathbb{N}$. C'est-à-dire : $u_{n+1} = 4u_n$. On a alors :*

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3 \cdot \sum_{i=0}^{n+1} u_i + 1 \\ &= 3 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} u_i + u_{n+1} \right) + 1 \\ &= \left(3 \cdot \sum_{i=0}^{n} u_i + 1 \right) + 3u_{n+1} \\ &= u_{n+1} + 3u_{n+1} = 4u_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc l'assertion est vraie pour $n + 1$.

Par récurrence, on a que $u_{n+1} = 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc $u_n = u_0 \cdot 4^n = 4^n$.

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{i=6}^{24} u_i &= \sum_{i=0}^{24} u_i - \sum_{i=0}^{5} u_i \\ &= \sum_{i=0}^{24} 4^i - \sum_{i=0}^{5} 4^i \\ &= \frac{4^{25} - 1}{3} - \frac{4^6 - 1}{3} = \frac{4^{25} - 4^6}{3} = \frac{4^6(4^{19} - 1)}{3} = \frac{2^{12}(2^{38} - 1)}{3} \end{aligned}$$