

Feuille 1 - Calcul ensembliste

1 Ensembles, éléments, inclusion

1. Exercice corrigé en amphi

Soit $E = \{0, 1\}$.

- (a) Décrire $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E .
- (b) Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

2. Exercice corrigé en amphi

Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\emptyset)$? Quels sont ceux de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$?

3. Décrire $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c\}$

4. Soit $E = \{a, b, c\}$. Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

- (a) $a \quad E$
- (b) $\{a\} \quad E$
- (c) $d \quad E$
- (d) $\{a\} \quad \mathcal{P}(E)$
- (e) $\emptyset \quad E$
- (f) $\emptyset \quad \mathcal{P}(E)$
- (g) $\{a, b\} \quad E$
- (h) $E \quad \mathcal{P}(E)$
- (i) $\{a, d\} \quad \mathcal{P}(E)$.

5. Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

Montrer que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ si et seulement si $A \subset B$.

2 Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

1. Exercice corrigé en amphi

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Démontrer les propriétés suivantes :

- (a) Lois de Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(b) Distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. Exercice corrigé en amphi

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E non vide. On définit la différence :

$$A - B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

- (a) Exprimer $A - B$ en fonction de A et $\bar{B}$.
- (b) Calculer $A - A$ et $E - A$.
- (c) Montrer que $\bar{A} - \bar{B} \subset \overline{A - B}$ et donner un exemple où l'égalité n'est pas vraie.
- (d) Montrer que $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

3. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et trois parties de E : $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ et $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- (a) Calculer $\bar{A}$, $A \cup C$, $B \cap C$, $(A \cap C) \cup B$, $A \cap (C \cup B)$, $A - C$, $C - A$.
- (b) Vérifier que $(A \cap C) \cup B \neq A \cap (C \cup B)$ et $A - C \neq C - A$.

4. Soient A une partie d'un ensemble E .

- (a) Calculer $A \cup \emptyset$, $A \cap \emptyset$, $A \cup E$, $A \cap E$, $A \cup \bar{A}$, $A \cap \bar{A}$.
- (b) Calculer $\bar{E}$, $\bar{\emptyset}$, $\bar{\bar{A}}$.
- (c) Montrer que $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$.

5. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E .

Simplifier : $A \cap (\bar{A} \cup B)$, $A \cup (\bar{A} \cap B)$, $A \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C)$, $A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.

6. Exercice supplémentaire

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E non vide. On définit la différence symétrique :

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

- (a) Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, calculer $\{1, 3, 5, 7\} \triangle \{3, 7\}$.
- (b) Calculer $A \triangle A$, $A \triangle E$ et $A \triangle \emptyset$.
- (c) Montrer que $A \triangle B = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$.
- (d) Montrer que $(A \triangle B) \cap (A \triangle C) \subset A \triangle (B \cap C)$.
- (e) Montrer que $A \triangle (B \cup C) \subset (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$.

7. Exercice corrigé en amphi

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E .

- (a) Montrer par un **raisonnement par l'absurde** que si $A \subset B$ alors $\bar{B} \subset \bar{A}$.
- (b) En déduire que $A \subset B$ si et seulement si $\bar{B} \subset \bar{A}$.

8. Exercice corrigé en amphi

- (a) Montrer que si $A \subset B$, alors $(A \cap C) \subset (B \cap C)$.

On dit aussi :

- i. il suffit que $A \subset B$ pour que $(A \cap C) \subset (B \cap C)$
 - ii. $A \subset B$ est une **condition suffisante** de $(A \cap C) \subset (B \cap C)$
 - iii. il est nécessaire (ou il faut) que $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ pour que $A \subset B$
 - iv. $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ est une **condition nécessaire** de $A \subset B$
- (b) Ecrire la réciproque de la proposition précédente puis montrer qu'elle est fausse en prenant $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ et $C = \{2\}$.

On dit alors :

- i. il ne suffit pas que $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ pour que $A \subset B$
- ii. $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ n'est pas une **condition suffisante** de $A \subset B$
- iii. il n'est pas nécessaire (ou il ne faut pas) que $A \subset B$ pour que $(A \cap C) \subset (B \cap C)$
- iv. $A \subset B$ n'est pas une **condition nécessaire** de $(A \cap C) \subset (B \cap C)$

9. Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

Montrer que $A \cup B = A$ si et seulement si $B \subset A$.

10. Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E .

- (a) Montrer par un **raisonnement par l'absurde** que si $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$, alors $A \cap B = A \cap C$.
- (b) En déduire que $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ si et seulement si $A \cap B = A \cap C$.
- (c) La proposition : " si $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$, alors $A \cap B = A \cap C$ " peut-elle aussi s'écrire
- i. il suffit que $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ pour que $A \cap B = A \cap C$?
 - ii. il suffit que $A \cap B = A \cap C$ pour que $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$?
 - iii. il faut que $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ pour que $A \cap B = A \cap C$?
 - iv. il faut que $A \cap B = A \cap C$ pour que $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$?
 - v. $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ est une condition suffisante de $A \cap B = A \cap C$?
 - vi. $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ est une condition nécessaire de $A \cap B = A \cap C$?
 - vii. $A \cap B = A \cap C$ est une condition suffisante de $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$?
 - viii. $A \cap B = A \cap C$ est une condition nécessaire de $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$?

11. Exercice supplémentaire

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E .

- (a) Montrer que si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$, alors $B \subset C$.
- (b) Reformuler la question précédente en terme de condition nécessaire et/ou suffisante.

12. Soient A et B deux parties d'un ensemble E .
- (a) Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
 - (b) Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.
 - (c) Soit $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ et $C = \{1, 3\}$. Vérifier que $C \in \mathcal{P}(A \cup B)$ mais $C \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Conclure.
13. **Exercice corrigé en amphi**
Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Décrire toutes les partitions de E constituées de trois parties de E .
14. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Décrire toutes les partitions de E .

3 Produit cartésien

1. **Exercice corrigé en amphi**

Soient E et F deux ensembles, A et B deux parties de E .

- (a) Déterminer $E \times \emptyset$
- (b) Montrer que $(A \cup B) \times F = (A \times F) \cup (B \times F)$
- (c) Montrer que $(A \cap B) \times F = (A \times F) \cap (B \times F)$

2. Soient $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{0\}$ et $G = \{a, b\}$.

Déterminer $E \times F$, $F \times E$, $G \times G$, $E \times F \times G$, $\mathcal{P}(F \times G)$.

3. Soient E et F deux ensembles, A , B et C trois parties de E formant une partition de E .

- (a) Rappeler la définition de : A , B et C forment une partition de E .
- (b) Montrer que $A \times F$, $B \times F$ et $C \times F$ forment une partition de $E \times F$.

4. **Exercice supplémentaire**

Soient E et F deux ensembles où F est non vide, A et B deux parties de E .

Montrer par un **raisonnement par l'absurde** que $A \cap B = \emptyset$ si et seulement si $A \times F \cap B \times F = \emptyset$.

4 Ensembles finis

1. **Exercice corrigé en amphi**

Démontrer que si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et

$$|E \times F| = |E| \times |F|$$

2. Exercice corrigé en amphi

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E .

(a) Montrer que $|A \cup B| = |A| + |B|$ si A et B sont disjoints.

(b) Montrer que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

3. Soient A , B et C trois parties d'un ensemble fini E .

Démontrer que $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

4. Rappel de la formule du binôme de Newton : pour tout entier n positif ou nul,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(a) Appliquer la formule du binôme de Newton avec $a = b = 1$ pour calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

(b) Soit E un ensemble fini à n éléments où n est un entier positif ou nul, p un entier compris entre 0 et n . Quel est le nombre de parties de E qui contiennent exactement p éléments ?

(c) En déduire $|\mathcal{P}(E)|$ puis $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))|$.