IUT d'Orsay — 2012-20013
Département Informatique — DUT 1A - S1
Exercices de mathématiques

Feuille 2 - Relations binaires de E dans F Applications

1 Relations binaires de E dans F

1.1 Définitions et représentations

1. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie de $E = \{1, 2, 3, 4\}$ dans $F = \{a, b, c\}$ par son graphe : $G_{\mathcal{R}} = \{(1, a),\ (1, c),\ (2, c),\ (3, a),\ (3, c)\}$.
Déterminer la matrice d'adjacence et la représentation sagittale de $\mathcal{R}$.

2. Soit $E = \{1, 3, 5, 7\}$ et $F = \{2, 4, 6\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie de E dans F par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x + y < 8$.
   (a) Déterminer le graphe et la matrice d'adjacence de $\mathcal{R}$.
   (b) Déterminer $\mathcal{R}(\{7\})$, $\mathcal{R}(\{1, 3\})$, $\mathcal{R}^{-1}(\{2\})$, $\mathcal{R}^{-1}(\{4, 6\})$.

3. **Exercice corrigé en amphi**
A et B sont deux parties de E. C et D sont deux parties de F.
Démontrer les propriétés suivantes :
   (a) $\mathcal{R}(A \cup B) = \mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B)$.
   (b) $\mathcal{R}(A \cap B) \subset \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$.
   (c) $\mathcal{R}^{-1}(C \cup D) = \mathcal{R}^{-1}(C) \cup \mathcal{R}^{-1}(D)$.
   (d) $\mathcal{R}^{-1}(C \cap D) \subset \mathcal{R}^{-1}(C) \cap \mathcal{R}^{-1}(D)$.

4. Soit $\mathcal{R} = (E = \{a, b\},\ F = \{1, 2\},\ G_{\mathcal{R}} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1)\})$
$A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{1\}$ et $D = \{2\}$.
   (a) Calculer $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(B)$ et $\mathcal{R}(A \cap B)$.
   (b) Vérifier que $\mathcal{R}(A \cap B) \neq \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$.
   (c) Calculer $\mathcal{R}^{-1}(C)$, $\mathcal{R}^{-1}(D)$ et $\mathcal{R}^{-1}(C \cap D)$.
   (d) Vérifier que $\mathcal{R}^{-1}(C \cap D) \neq \mathcal{R}^{-1}(C) \cap \mathcal{R}^{-1}(D)$.

5. **Exercice corrigé en amphi**
Soit E et F deux ensembles finis non vides. Calculer le nombre de relations binaires définies de E dans F.

1.2 Opérations

1. Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$.
   Soit $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ les relations binaires définies de E dans F par leur graphe
   $G_{\mathcal{R}_1} = \{(a, 1), (b, 3), (d, 3), (d, 4), (e, 4)\}$ et $G_{\mathcal{R}_2} = \{(a, 1), (a, 3), (d, 2), (d, 3), (e, 3)\}$.
   Pour chacune des relations suivantes déterminer son graphe et sa matrice d'adjacence.
   (a) $\overline{\mathcal{R}_1}$, la relation complémentaire de $\mathcal{R}_1$
   (b) $\mathcal{R}_1^{-1}$, la relation réciproque de $\mathcal{R}_1$
   (c) $\mathcal{R}_1 \circ {\mathcal{R}_1}^{-1}$
   (d) ${\mathcal{R}_1}^{-1} \circ \mathcal{R}_1$
   (e) $\mathcal{R}_{1/A}$, la restriction de $\mathcal{R}_1$ à $A = \{c, d\}$
   (f) La restriction de $\mathcal{R}_1$ à $B = \{1, 2\}$
   (g) $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$
   (h) $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$

2. Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$ et $H = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.
   Soit $\mathcal{R}_1$ la relation binaire définie de E dans F par son graphe $G_{\mathcal{R}_1} = \{(a, 1), (b, 3), (d, 3), (d, 4), (e, 4)\}$
   et $\mathcal{R}_2$ la relation binaire définie de F dans H par son graphe$G_{\mathcal{R}_2} = \{(1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha), (4, \alpha)\}$.
   (a) Déterminer $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.
   (b) Déterminer ${\mathcal{R}_1}^{-1} \circ \mathcal{R}_1$.
   (c) Déterminer $\mathcal{R}_1 \circ {\mathcal{R}_1}^{-1}$.

2 Applications

2.1 Image directe et image réciproque

Soient f une application de E dans F.
Soit $A \subset E$. L'image de A par f est l'ensemble $f(A) = \{y \in F \ / \ \exists x \in A, \ \ y = f(x)\}$.
Soit $C \subset F$. L'image réciproque de C par f est l'ensemble $f^{-1}(C) = \{x \in E \ / \ \ f(x) \in C\}$.

1. **Exercice corrigé en amphi**
   f est une application de E dans F.
   A est une partie de E. C et D sont deux parties de F.
   (a) Montrer que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
   (b) Montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

2. f est une application de E dans F.
   (a) Montrer que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   (b) Montrer que pour toute partie C de F, on a $f(f^{-1}(C)) \subset C$.

2.2 Applications injectives, surjectives, bijectives

1. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit f une application définie de E dans F. Donner la définition de
   (a) f n'est pas injective sur E
   (b) f n'est pas surjective de E dans F
   (c) f n'est pas bijective de E dans F

2. Soit f l'application définie de $E = \{a, b, c\}$ dans $F = \{1, 2, 3\}$ par $f(a) = f(b) = 1$ et $f(c) = 2$.
   (a) Déterminer $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{3\})$.
   (b) Déterminer $f(E)$.
   (c) f est-elle injective ?
   (d) f est-elle surjective ?
   (e) f est-elle bijective ?

3. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (2x + y, x - y)$.
   (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $f^{-1}(\{(a, b)\})$.
   (b) En déduire que f est bijective.
   (c) Déterminer son application réciproque f^{-1}.

4. **Exercice supplémentaire**
   Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y) = x^2 + y^2$.
   (a) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-2\})$.
   (b) f est-elle injective ?
   (c) f est-elle surjective ?
   (d) f est-elle bijective ?

5. **Exercice corrigé en amphi**
   $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2\}$.
   (a) Calculer $|F^E|$.
   (b) Construire toutes les applications de F^E.
   (c) Pour chacune d'elles, dire si elle est injective, surjective, bijective.
   (d) Dans le cas où l'application est bijective, déterminer son application réciproque.

6. Combien y a-t-il d'applications de $E = \{a, b, c\}$ dans $F = \{1, 2\}$. Les construire toutes. Pour chacune d'elles, dire si elle est injective, surjective, bijective.

7. **Exercice supplémentaire**
   $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.
   (a) Calculer $|F^E|$.
   (b) Construire toutes les applications de F^E.
   (c) Pour chacune d'elles, dire si elle est injective, surjective, bijective.

8. Pour chacune des applications suivantes
   (a) Préciser si l'application est injective, surjective, bijective.
   (b) Déterminer l'application réciproque quand elle existe.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \to n+1 \end{cases}, \; f_2 : \begin{cases} \mathbb{Z} & \to \mathbb{Z} \\ n & \to n+1 \end{cases}, \; f_3 : \begin{cases} \mathbb{Z} & \to \mathbb{N} \\ n & \to 2|n| \end{cases}$$

9. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit f une application de E dans F, A et B deux parties de E.
   Démontrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si f est injective.

10. Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications. On rappelle que l'application composée $g \circ f : E \mapsto G$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
    (a) On suppose que f et g sont injectives. Démontrer que $g \circ f$ est injective.
    (b) On suppose que f et g sont surjectives. Démontrer que $g \circ f$ est surjective.
    (c) On suppose que f et g sont bijectives. Démontrer que $g \circ f$ est bijective.

11. **Exercice supplémentaire**
    Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications.
    (a) On suppose $g \circ f$ injective. En déduire que f est injective.
    (b) On suppose $g \circ f$ surjective. En déduire que g est surjective.

12. **Exercice corrigé en amphi**
    On note F^E l'ensemble des applications de E dans F.
    On suppose que E et F sont deux ensembles finis.
    (a) Montrer que $|F^E| = |F|^{|E|}$.
    (b) Calculer le nombre d'applications injectives de E dans F.
    (c) Calculer le nombre d'applications bijectives de E dans F.

2.3 Fonction caractéristique

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On considère l'application $1_A : E \mapsto \{0,1\}$ définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in A \\ 0 & si \;\; x \notin A \end{cases}$$

1_A est appelée fonction caractéristique de A.

1. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit E un ensemble, $A \subset E$, $B \subset E$.
   Montrer que $A = B$ si et seulement si $1_A = 1_B$.
2. Calculer les valeurs suivantes : $1_{\mathbb{N}}(-2)$, $1_{\mathbb{N}}(3)$, $1_{\mathbb{Z}}(-2)$, $1_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2})$, $1_{\mathbb{Q}}(\frac{1}{3})$, $1_{\mathbb{Q}}(0)$.
3. **Exercice suppémentaire**
   Soit $E = \{0,1,2,3,4,5\}$, $A = \{0,3\}$, $B = \{0,2,4\}$.
   (a) Calculer $1_A(x)$ pour tout $x \in E$.
   (b) Calculer $1_{\bar{A}}(x)$ pour tout $x \in E$.
   (c) Calculer $1_B(x)$ pour tout $x \in E$.
   (d) Calculer $1_{A\cup B}(x)$ pour tout $x \in E$.
   (e) Calculer $1_{A\cap B}(x)$ pour tout $x \in E$.
4. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit E un ensemble, $A \subset E$ et $B \subset E$.
   (a) Montrer que $1_{\bar{A}} = 1_E - 1_A$.
   (b) Montrer que $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$ et $1_{A\cap B} = 1_A \times 1_B$.
5. Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E. Montrer que
   (a) Calculer 1_{A-B} en fonction de 1_A et 1_B.
   (b) Montrer que $1_{A\cap B\cap C} = 1_A 1_B 1_C$.
   (c) Montrer que $1_{A\cup B\cup C} = 1_A + 1_B + 1_C - 1_A 1_B - 1_A 1_C - 1_B 1_C + 1_A 1_B 1_C$.
   (d) Montrer que $1_{A\triangle B} = (1_A - 1_B)^2$.
6. A, B et C sont trois parties d'un ensemble E.
   Vérifier que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ en utilisant les fonctions caractéristiques.
7. **Exercice suppémentaire**
   Montrer que $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ si et seulement si $A \cap B = A \cap C$ en utilisant les fonctions caractéristiques.

8. **Exercice corrigé en amphi**

Soit f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E); \quad f(A) = 1_A$$

(a) Montrer que f est bijective de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0,1\}^E$.

(b) On suppose que E est un ensemble fini à n éléments.

i. Calculer $|\{0,1\}^E|$.

ii. En déduire $|\mathcal{P}(E)|$.