IUT d'Orsay
Département Informatique
Exercices de mathématiques

2012-20013
DUT 1A - S1

# Feuille 3 - Relations binaires sur $E$ <br> Relations d'équivalence <br> Relations d'ordre

## 1 Relations binaires de $E$ dans $E$ : représentations, propriétés

1. **Exercice corrigé en amphi**
   $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur un ensemble $E$. Ecrire ce que signifie :
   (a) $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive.
   (b) $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.
   (c) $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.
   (d) $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.

2. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit $E = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{R}$ est une relation binaire définie sur $E$ par sa représentation sagittale :

$$\begin{tikzcd} \text{b} \arrow[rr] & & \text{c} \\ & \text{a} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

   (a) i. Représenter $\mathcal{R}$ par
         – son graphe
         – sa matrice d'adjacence
       ii. Déterminer si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.
   (b) Déterminer $\mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ et leurs propriétés.

3. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$. Démontrer que $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ est symétrique.

4. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $E$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x+2y$ est impair.
   (a) Représenter $\mathcal{R}$ par
       – son graphe
       – sa matrice d'adjacence
   (b) Déterminer si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

5. Dans chacun des cas, déterminer si la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.
   (a) $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x + y$ est pair
   (b) $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x + y$ est impair
   (c) $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $xy$ est impair

6. Soit $E$ un ensemble fini à $n$ éléments où $n$ est un entier strictement positif.
   (a) Combien y a-t-il de relations binaires sur $E$ ?
   (b) Combien y a-t-il de relations binaires réflexives sur $E$ ?
   (c) Combien y a-t-il de relations binaires symétriques sur $E$ ?

7. **Exercice supplémentaire**
   Dans chacun des cas, déterminer si la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble des humains est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.
   (a) $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x$ est parent de $y$
   (b) $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x$ a le même parent que $y$
   (c) $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x$ est plus jeune que $y$

# 2 Relations d'équivalence

1. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur l'ensemble des entiers relatifs par : $a\mathcal{R}b$ si et seulement si $a - b$ est pair.
   (a) Montrer que c'est une relation d'équivalence.
   (b) Déterminer toutes ses classes d'équivalence. On note $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

2. **Exercice corrigé en amphi**
   (a) Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{1, 5\}$, et $C = \{3, 5\}$.
   Justifier que $A$, $B$ et $C$ ne peuvent pas être les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur $E$.
   (b) Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{1, 5\}$, et $C = \{3\}$.
      i. Justifier que $A$, $B$ et $C$ forment une partition de $E$.
      ii. Décrire la relation d'équivalence définie sur $E$ dont les classes d'équivalence sont les trois ensembles $A$, $B$ et $C$ par son graphe, par sa matrice d'adjacence, par sa représentation sagittale.

3. Démontrer que si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$, alors $\mathcal{R}^{-1}$ est aussi une relation d'équivalence sur $E$..

4. Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f \in F^E$.
   Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $E$ par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$.
   (b) Soit $a \in E$. Déterminer la classe de $a$ si $f$ est injective.
   (c) Démontrer que si $f$ n'est pas injective, il existe au moins une classe qui contient deux éléments ou plus.
   (d) Exemples d'applications $f$ :
      i. Soit $f$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$.
         – Démontrer que $f$ n'est pas injective.
         – Soit $a \in \mathbb{R}$. Décrire la classe d'équivalence de $a$ selon la valeur de $a$.
      ii. Soit $f$ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f((x, y)) = x - y$.
         – $f$ est-elle injective ?
         – Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la classe d'équivalence de $(a, b)$ puis en donner une interprétation géométrique.
      iii. Soit $E$ un ensemble non vide et $A$ une partie de $E$. Soit $f$ l'application définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $f(X) = X \cup A$.
         – Déterminer la classe de $\emptyset$ et la classe de $A$.
         – Soit $A_0 \subset A$. Déterminer la classe de $A_0$. En déduire la classe d'une partie quelconque $B$ de $E$.

5. **Exercice supplémentaire**
   (a) Démontrer que l'intersection de deux relations d'équivalence sur $E$ est une relation d'équivalence.
   (b) Démontrer que la réunion de deux relations d'équivalence sur $E$ n'est pas en général une relation d'équivalence.

6. **Exercice supplémentaire**
   Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur l'ensemble des entiers relatifs par :
   $a\mathcal{R}b$ si et seulement si $a - b$ est divisible par $3$.
   (a) Montrer que c'est une relation d'équivalence.
   (b) Démontrer que l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$, noté $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, est égal à $\{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2}\}$.

7. **Exercice supplémentaire**
   Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur l'ensemble des entiers relatifs par :
   $a\mathcal{R}b$ si et seulement si $a^2 - b^2$ est divisible par $3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Démontrer que l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ est égal à $\{\bar{0},\ \bar{1}\}$.

# 3 Relations d'ordre

1. **Exercice corrigé en amphi**
   (a) Montrer que la relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.
   (b) $\mathbb{R}$ possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?

2. **Exercice corrigé en amphi**
   (a) Montrer que la relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $E = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$.
   (b) $E$ possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?

3. Démontrer que si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $E$, alors $\mathcal{R}^{-1}$ est aussi une relation d'ordre sur $E$.

4. On définit sur $E = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x$ divise $y$.
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
   (b) Est-ce une relation d'ordre total ?
   (c) $E$ possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?

5. **Exercice supplémentaire**
   On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x$ divise $y$.
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
   (b) Est-ce une relation d'ordre total ?
   (c) Décrire $\{x \in E,\ x\mathcal{R}5\}$ et $\{x \in E,\ 5\mathcal{R}x\}$.
   (d) $\mathbb{N}^*$ possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?

6. **Exercice supplémentaire**
   On définit sur $\mathbb{Z}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x$ divise $y$.
   Justifier que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^*$.

7. Soit $E$ un ensemble et la relation d'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de $E$.
   (a) Est-ce une relation d'ordre ? Si oui est-ce une relation d'ordre total ?
   (b) Déterminer le plus petit élément et le plus grand élément de $P(E)$.
   (c) Si $A$ et $B$ sont deux parties de $E$, quels sont les minorants et majorants du sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ : $\{A,\ B\}$ ? Donner le plus grand des minorants et le plus petit des majorants de $\{A,\ B\}$.