IUT d'Orsay
Département Informatique
Exercices de mathématiques

2012-20013
DUT 1A - S1

Feuille 4 - Logique

1 Tables de vérité

1. **Exercice corrigé en amphi**
   Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   (a) 2 divise 3 et 2 divise 4
   (b) 2 divise 3 ou 2 divise 4
   (c) 2 divise 3 ou 2 divise 5
   (d) 2 divise 3 si 2 divise 4
   (e) 2 divise 4 si 2 divise 3
   (f) 2 divise 4 seulement si 2 divise 3
   (g) 2 divise 4 si et seulement si 2 divise 3
   (h) 2 divise 4 si et seulement si 2 divise 6

2. **Exercice corrigé en amphi**
   Construire les tables de vérité des propositions suivantes puis indiquer les tautologies et les contradictions.
   (a) $p \wedge \neg p$
   (b) $p \vee \neg p$
   (c) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
   (d) $(p \vee q) \Rightarrow p$

3. **Exercice corrigé en amphi**
   Vérifier que les deux propositions suivantes et sont des tautologies.
   (a) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
   (b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

4. **Exercice corrigé en amphi**
   (a) p et q sont deux propositions telles que $p \Rightarrow q$ est vraie.
      i. On suppose que p est vraie. Quelle est la valeur de vérité de q ?
      ii. On suppose que q est fausse. Quelle est la valeur de vérité de p ?
      iii. On suppose que q est vraie. Quelle est la valeur de vérité de p ?

(b) p et q sont deux propositions telles que $q \Rightarrow p$ est fausse. Quelles sont les valeurs de vérité de p et de q ?

(c) Quelles sont les valeurs de vérité de p et de q lorsque $p \Leftrightarrow q$ est vraie ?

5. Construire les tables de vérité des propositions suivantes :
   (a) $(p \wedge q) \vee [(\neg p) \wedge (\neg q)]$
   (b) $(p \vee q) \wedge r$
   (c) $p \vee (q \wedge r)$
   (d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
   (e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

6. Vérifier que les deux propositions suivantes sont des tautologies :
   (a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$
   (b) $[p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

7. p, q et r sont trois propositions telles que $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow r$ sont vraies.
   (a) On suppose que p est vraie. Quelles sont les valeurs de vérité de q et r ?
   (b) On suppose que q est fausse. Quelles sont les valeurs de vérité de p et r ?
   (c) On suppose que q est vraie. Quelles sont les valeurs de vérité de p et r ?
   (d) On suppose que r est fausse. Quelles sont les valeurs de vérité de p et q ?
   (e) Les propositions $p \Rightarrow r$, $r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, $(p \vee q) \Rightarrow r$, $(p \wedge q) \Rightarrow r$ sont-elles vraies ou fausses ?

2 Propositions équivalentes

On rappelle que deux propositions A et B sont équivalentes (noté $A \equiv B$) si elles ont la même table de vérité.

1. **Exercice corrigé en amphi**
   (a) Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des propositions.
   (b) i. Combien existe-t-il de classes d'équivalence fonctions d'une variable propositionnelle p ?
       ii. Donner un représentant de chaque classe et sa table de vérité.
   (c) i. Combien existe-t-il de classes d'équivalence fonctions de deux variables propositionnelles p et q ?
       ii. Donner un représentant de chaque classe et sa table de vérité.

2. **Exercice corrigé en amphi**

   Dans chacun des cas, construire les tables de vérité de chacune des propositions pour vérifier les équivalences suivantes :

   (a) $\neg(\neg p) \equiv p$

   (b) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

   (c) $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

   (d) $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

3. On considère les propositions suivantes :
   p : Il pleut
   q : Il y a des nuages

   (a) Ecrire l'implication $p \Rightarrow q$, sa contraposée, sa réciproque et la contraposée de sa réciproque.

   (b) Lesquelles sont vraies ?

4. Dans chacun des cas suivants, construire les tables de vérité de chacune des propositions et vérifier qu'elles sont équivalentes.

   (a) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

   (b) $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p \equiv \neg p \Leftrightarrow \neg q$

   (c) $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

5. **Exercice supplémentaire**

   On considère les propositions suivantes :

   p : l'utilisateur appuie sur la touche *Cancel*
   q : l'utilisateur appuie sur la touche *OK*
   r : le programme se plante
   s : le fichier est effacé

   On définit les trois propositions suivantes :

   A : ≪Si l'utilisateur appuie sur la touche *OK*, alors le programme ne se plante pas.≫

   B : ≪Le fichier est effacé si le programme se plante ou l'utilisateur appuie sur la touche *Cancel*. ≫

   C : ≪L'utilisateur n'appuie pas sur les 2 touches *OK* et *Cancel* en même temps donc : le fichier n'est pas effacé si l'utilisateur appuie sur la touche *OK*. ≫

   (a) Exprimer A, B et C en fonction de p, q, r et s et des connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$ et $\Rightarrow$.

   (b) Ecrire la contraposée de A.

   (c) Ecrire la réciproque de B.

   (d) Ecrire la négation de C.

(e) On suppose que A, B et C sont vraies.

i. Que se passe-t-il si l'utilisateur appuie sur les touches *Cancel* et *OK* en même temps ?

ii. On constate que le programme se plante. Que peut-on en déduire ?

iii. On constate que le fichier n'est pas effacé. Que peut-on en déduire ?

3 Application des lois de Morgan et des règles de calcul

1. **Exercice corrigé en amphi**

   (a) Exprimer $p \wedge q$ en fonction de p, q et des connecteurs $\vee$ et $\neg$.

   (b) Exprimer $p \vee q$ en fonction de p, q et des connecteurs $\wedge$ et $\neg$.

2. **Exercice corrigé en amphi**
   Simplifier les propositions suivantes puis indiquer les tautologies :

   (a) $p \Rightarrow (p \vee q)$

   (b) $p \Rightarrow (p \wedge q)$

3. Simplifier les propositions suivantes puis indiquer les tautologies :

   (a) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q)$

   (b) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

   (c) $(p \Rightarrow p) \Rightarrow q$

   (d) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

   (e) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

4. Dans chacun des cas suivants, simplifier les deux propositions puis dire si elles sont équivalentes ou pas.

   (a) $p \wedge (p \Rightarrow q)$, $p \wedge q$

   (b) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$, $[(p \wedge q) \Rightarrow r]$

   (c) $[(p \vee q) \Rightarrow r]$, $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

5. Ecrire la négation des propositions suivantes : $p \wedge \neg q$; $p \Rightarrow q$; $p \Leftrightarrow q$; $p \vee (q \wedge r)$; $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$; $(\neg p \vee q) \Rightarrow r$;

6. **Exercice supplémentaire**
   On construit le connecteur binaire | appelé connecteur de Sheffer par :

   $$p \mid q = (\neg p) \vee (\neg q)$$

   (a) Construire la table de vérité de $p \mid q$.

(b) Calculer $p \mid p$, $\neg(p \mid q)$, $\neg p \mid \neg q$.

(c) En déduire l'écriture des propositions $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$ uniquement à l'aide du connecteur de Sheffer.

7. **Exercice supplémentaire**
   On définit le connecteur $\oplus$ par : $p \oplus q$ est vraie si et seulement si p est vraie ou q est vraie, mais pas les deux en même temps. C'est le ou exclusif.
   (a) Ecrire la table de vérité de $p \oplus q$.
   (b) Montrer que $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.

4 Prédicats

1. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit x représentant un chat quelconque et $P(x)$ le prédicat selon lequel x est gris. Ecrire chacune des propositions suivantes sous forme symbolique :
   (a) Tous les chats sont gris.
   (b) Il existe un chat non gris.
   (c) Aucun chat n'est gris.

2. Soit x représentant un chat quelconque, $P(x)$ le prédicat selon lequel x est gris, $Q(x)$ le prédicat selon lequel x a des moustaches.
   (a) Exprimer la proposition $\forall x, (P(x) \wedge Q(x))$.
   (b) Parmi les propositions suivantes, laquelle en est la négation ?
      i. Il existe un chat non gris et sans moustache.
      ii. Il n'existe aucun chat gris et avec des moustaches.
      iii. Il existe un chat non gris ou sans moustache.

3. (a) Soit $f \in F^E$. Ecrire la négation de f est injective.
   (b) $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur un ensemble E. Ecrire la négation de $\mathcal{R}$ est transitive.

4. Soit le prédicat $P(x, y) = \{x + y = 0\}$.
   Pour chacune des propositions suivantes, donner sa valeur de vérité et écrire sa négation :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x, y)$
   (b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, P(x, y)$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x, y)$
   (d) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x, y)$