IUT d'Orsay
Département Informatique
Exercices de mathématiques

2012-20013
DUT 1A - S1

Feuille 5 -Raisonnements par récurrence - Suites récurrentes

1 Raisonnements par récurrence

1. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit le prédicat $P(n) = \{n^3 - n \ \ est \ \ divisible \ \ par \ \ 3\}$.
   Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est vraie.

2. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}$).
   Soit le prédicat $P(n) = \{|\mathcal{P}(E)| = 2^n\}$.
   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est vraie.

3. **Exercice corrigé en amphi**
   (a) Soit le prédicat $P(n) = \left\{\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}\right\}$
   Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n)$ est vraie.
   (b) Soit le prédicat $Q(n) = \left\{\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{(n+3)(n-2)}{2}\right\}$
      i. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q(n) \vdash Q(n+1)$
      ii. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, Q(n)$ est fausse.

4. On définit la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1 + \sqrt{2}$
   Soit le prédicat $P(n) = \left\{\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ \ u_n = a_n + b_n\sqrt{2}\right\}$.
   (a) Calculer u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est vraie.
   (c) Donner une relation de récurrence permettant de calculer les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Soit le prédicat $P(n) = \{3^{2n} - 2^n \ \ est \ divisible \ par \ 7\}$.
   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

6. Soit le prédicat $P(n) = \{2^n \geq n^2\}$.
   (a) Déterminer les valeurs de vérité de $P(0), P(1), P(2), P(3), P(4)$.

(b) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 4, P(n)$ est vraie.

(c) En déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles on a $2^n \geq n^2$.

7. Soit le prédicat $P(n) = \left\{\sum_{p=1}^{n} p \times p! = (n+1)! - 1\right\}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(n)$ est vraie.

8. **Exercice supplémentaire**
Soit le prédicat $P(n) = \{7^n - 1 \; est \; divisible \; par \; 6\}$.
   (a) $P(0)$ est-elle vraie ?
   (b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(n)$ est vraie.

9. **Exercice supplémentaire**
Soit le prédicat $P(n) = \left\{\sum_{p=1}^{n} p^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(n)$ est vraie.

2 Suites récurrentes

1. **Exercice corrigé en amphi**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit le prédicat $P(n) = \{u_n^2 \geq 2\}$.
   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$ est vraie.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est défini.
   (c) Calculer $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier $n \geq 0$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est égale à $\sqrt{2}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 2^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2.
   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{12} u_k$ et $\sum_{k=10}^{20} u_k$.

3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 8n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit le prédicat $P(n) = \{u_n = (2n-1)^2\}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$ est vraie.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Soit le prédicat $P(n) = \{u_n > 0\}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est définie.

(c) Soit le prédicat $Q(n) = \left\{u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right\}$
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie.

5. **Exercice corrigé en amphi**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer les racines r_1 et r_2 du polynôme : $r^2 + r - 6 = 0$.
   (b) En déduire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $u_n = ar_1^n + br_2^n$.

6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) i. Calculer les racines r_1 et r_2 du polynôme : $r^2 - r - 1 = 0$.
   ii. En déduire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $u_n = ar_1^n + br_2^n$.
   (b) Soit le prédicat $P(n) = \{\sum_{i=1}^n u_{2i-1} = u_{2n}\}$.
   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie.
   (c) Soit le prédicat $Q(n) = \{u_{n+1} \times u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n\}$.
   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, Q(n)$ est vraie.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer les racines du polynôme : $r^2 - 2r + 1 = 0$.
   (b) Soit le prédicat $P(n) = \{u_n = n\}$.
   i. Vérifier que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
   ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [P(n) \wedge P(n+1)] \vdash P(n+2)$.
   iii. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n)$ est vraie.
   (c) Soit le prédicat $Q(n) = \{u_n = n + 2\}$.
   i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [Q(n) \wedge Q(n+1)] \vdash Q(n+2)$.
   ii. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q(n)$ est fausse.

8. **Exercice supplémentaire**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer les racines r_1 et r_2 du polynôme : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
   (b) En déduire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $u_n = ar_1^n + br_2^n$.