Feuille 6 - Calcul matriciel

1 Opérations sur les matrices

1. **Exercice corrigé en amphi**
   Calculer, quand cela est possible, les produits AB et BA :
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$
2. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_3$
   $L_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $L_3 = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ les trois lignes de A
   $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ les trois colonnes de A
   (a) $P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$
      i. Calculer PA et vérifier que ses lignes sont αL_1, βL_2 et γL_3.
      ii. Calculer AP et vérifier que ses colonnes sont αC_1, βC_2 et γC_3.
   (b) $P = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
      i. Calculer PA et vérifier que ses lignes sont $L_1 + \lambda L_2$, L_2 et L_3.
      ii. Calculer AP et vérifier que ses colonnes sont C_1, $C_2 + \lambda C_1$ et C_3.
   (c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
      i. Calculer PA et vérifier que ses lignes sont L_1, L_3 et L_2.
      ii. Calculer AP et vérifier que ses colonnes sont C_1, C_3 et C_2.

3. (a) Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_{3,2}$ vérifiant

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{1,2\}, \quad a_{ij} = i + j - 2$$

Calculer A puis ${}^tA$.

   (b) Soit $B = (b_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_{2,4}$ vérifiant

$$\forall (i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2,3,4\}, \quad b_{ij} = i - j$$

Calculer B puis ${}^tB$.

   (c) i. Calculer AB puis ${}^t(AB)$.

   ii. Calculer ${}^tB\ \ {}^tA$ et vérifier que ${}^t(AB) = {}^tB\ \ {}^tA$.

   (d) Le produit BA est-il défini ?

4. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer les produits AB, AD, BC, CB et CD.

   (b) Existe-t-il d'autres produits possibles entre ces matrices ? Si oui, les calculer.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 + 2A^2 - 12A = -8I_3$.

6. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer AB et AC.

   (b) Justifier que la règle de simplification

$$\forall (n,p,m) \in (\mathbb{N}^*)^3,\ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p},\ \forall (B,C) \in (\mathcal{M}_{p,m})^2, \quad AB = AC \Rightarrow B = C$$

n'est pas valide.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\{M \in M_2;\ AM = MA\}$.

8. (a) A et B sont deux matrices carrées quelconques de taille n.

   i. Développer $(A+B)^2$.

   ii. Développer $(A+B)^3$.

(b) A et B sont deux matrices carrées de taille n vérifiant$AB = BA$.

   i. Développer $(A+B)^2$.

   ii. Développer $(A+B)^3$.

9. Les formules suivantes sont-elles valides pour A, B et C trois matrices carrées quelconques de taille n ?

   (a) $A^3 + A^2B + A = A(A^2 + AB + I_n)$

   (b) $A^2B - 2B^2A + AB = (A^2 - 2BA + A)B$

   (c) $AB^2 + A^3B^2 + AB = AB(B + A^2B + I_n)$

   (d) $A^3B - 2AB^2 + AB = A(A^2 - 2B + I_n)B$

10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} A^k$ en fonction de n.

11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f_A l'application associée à A définie par :

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ X & \longrightarrow f_A(X) = AX \end{cases}$$

   (a) Calculer $f_A(X)$ pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

   (b) Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, déterminer $f_A^{-1}(\{Y\}) = \{X \in \mathbb{R}^3; \;\; f_A(X) = Y\}$.

   (c) f_A est-elle injective ? surjective ? bijective ?

12. **Exercice corrigé en amphi : Application du calcul matriciel aux relations binaires**
   Rappel : Soit $\mathcal{R} = (E, F, G_{\mathcal{R}})$ une relation binaire de l'ensemble $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ dans l'ensemble $F = \{y_1, \dots, y_p\}$.
   On définit R, la matrice d'adjacence de $\mathcal{R}$:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; \; \forall j \in \{1, \dots, p\} \;\; r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \mathcal{R} y_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

i. Quelle est la propriété de R qui caractérise le fait que la relation $\mathcal{R}$ est
   - réflexive ?
   - symétrique ?
   - antisymétrique ?

ii. Démontrer que $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad (R^2)_{ij} = 1 \implies r_{ij} = 1$$

iii. Exprimer la matrice d'adjacence de $\mathcal{R}^{-1}$ en fonction de R.

(b) Soit $\mathcal{R} = (E, F, G_{\mathcal{R}})$ et R sa matrice d'adjacence, $\mathcal{S} = (F, H, G_{\mathcal{S}})$ et S sa matrice d'adjacence.
Calculer la matrice d'adjacence de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ en fonction de R et de S.

13. **Exercice supplémentaire**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calculer AB puis ${}^t(AB)$.

(b) Calculer ${}^tB \ \ {}^tA$ et vérifier que ${}^t(AB) = {}^tB \ \ {}^tA$.

14. **Exercice supplémentaire**

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifiez que $AB = 0$ bien que $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

(b) Calculer BA et vérifier que $AB \neq BA$.

15. **Exercice supplémentaire**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f_A l'application associée à A définie par :

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X & \longrightarrow f_A(X) = AX \end{cases}$$

(a) Calculer $f_A(X)$ pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(b) Soit $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, déterminer $f_A^{-1}(\{Y\}) = \{X \in \mathbb{R}^2; \ \ f_A(X) = Y\}$.

(c) Justifier que f_A n'est pas bijective.

2 Matrices inversibles

1. **Exercice corrigé en amphi**

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$

   Démontrer que si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2. **Exercice corrigé en amphi**

   Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}$. Montrer par un raisonnement par l'absurde que s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ avec $X \neq 0$ tel que $AX = 0$, alors A n'est pas inversible.

3. (a) Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Montrer que A_1 est inversible et déterminer A_1^{-1}.

   (b) Soit $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Trouver $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ avec $X \neq 0$ tel que $AX = 0$. En déduire que A_2 n'est pas inversible.

4. **Exercice corrigé en amphi**

   Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.

   (a) On a montré que $A^3 + 2A^2 - 12A = -8I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

   (b) Soit f_A l'application associée à A définie par :

   $$f_A : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X & \longrightarrow f_A(X) = AX \end{cases}$$

   Justifier que f_A est bijective et déterminer son application réciproque f_A^{-1}.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Soit f_A l'application associée à A définie par :

   $$f_A : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X & \longrightarrow f_A(X) = AX \end{cases}$$

(a) Calculer $f_A(X)$ pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(b) Soit $Y \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f_A^{-1}(\{Y\}) = \{X \in \mathbb{R}^3;\ \ f_A(X) = Y\}$.

(c) Démontrer que f_A est bijective et déterminer son application réciproque f_A^{-1}.

(d) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer $A^2 - 2A$.

   (b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

   (c) Soit f l'application définie par :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_3 & \longrightarrow \mathcal{M}_3 \\ M & \longrightarrow f(M) = MA \end{cases}$$

   i. Soit $P \in \mathcal{M}_3$. Déterminer $f^{-1}(\{P\}) = \{M \in \mathcal{M}_3;\ \ f_A(M) = P\}$.

   ii. En déduire que f est bijective et déterminer son application réciproque f^{-1}.

7. Soit $P \in \mathcal{M}_p$ inversible et $A \in \mathcal{M}_p$.
   Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(P \times A \times P^{-1})^n = P \times A^n \times P^{-1}$.

8. Etude d'une suite récurrente double :
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 4u_n + 2v_n;\quad v_{n+1} = -3u_n - v_n$$

   et $u_0 = 0;\ \ v_0 = 1$.

   On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer X_0.

   (b) Déterminer $A \in \mathcal{M}_2$ telle que $X_{n+1} = AX_n$

   (c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ X_n = A^n X_0$.

   (d) Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}.

   (e) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer D^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (f) Vérifier que $PDP^{-1} = A$.

(g) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(h) En déduire u_n et v_n en fonction de n.

9. **Exercice corrigé en amphi**
A est une matrice carrée inversible de taille n.
   (a) Montrer que ${}^tA$ est aussi inversible et $({}^tA)^{-1} ={}^t (A^{-1})$.
   (b) Montrer que si A est symétrique, A^{-1} l'est aussi.
   (c) Montrer que si A est antisymétrique, A^{-1} l'est aussi.

10. **Exercice corrigé en amphi**
A est une matrice orthogonale de taille n. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

11. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n)^2, \quad A \text{ et } B \ \ inversibles \Rightarrow A+B \ \ inversible$$

12. **Exercice supplémentaire**
   (a) Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que A_1 est inversible et déterminer A_1^{-1}.
   (b) Soit $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Trouver $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ avec $X \neq 0$ tel que $AX = 0$. En déduire que A_2 n'est pas inversible.

13. **Exercice supplémentaire**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Soit f_A l'application associée à A définie par :

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \ \mathbb{R}^3 \\ X & \longrightarrow \ f_A(X) = AX \end{cases}$$

   (a) Calculer $f_A(X)$ pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
   (b) Déterminer $f_A^{-1}(\{0\})$.
   (c) Justifier que f_A n'est pas bijective puis en déduire que A n'est pas inversible.

3 Calculs de déterminants

1. **Exercice corrigé en amphi**
   Calculer les déterminants des matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 8 & 9 & -4 \end{pmatrix},$$

2. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit $A \in \mathcal{M}_3$.
   (a) A_1 est la matrice obtenue à partir de A en multipliant une ligne de A par un réel λ. Montrer que $\det(A_1) = \lambda \det(A)$.
   (b) A_2 est la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes i et j de A ($i \neq j$). Montrer que $\det(A_2) = -\det(A)$.
   (c) A_3 est la matrice obtenue à partir de A en ajoutant à la ligne i de A λ fois la ligne j de A ($i \neq j$). Montrer que $\det(A_3) = \det(A)$.
   (d) En déduire que si deux lignes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.

3. **Exercice corrigé en amphi**
   Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.
   (a) Caluler le déterminant de A.
   (b) Justifier que A est inversible.
   (c) Calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs.

4. A et B sont deux matrices carrées de taille 2 et λ est un réel.
   Démontrer les propriétés suivantes :
   (a) $\det({}^tA) = \det(A)$
   (b) $\det(\lambda A) = \lambda^2 \times \det(A)$
   (c) $\det(AB) = \det(A) \times \det(B) = \det(BA)$

5. Calculer les déterminants des matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Soit A une matrice orthogonale de taille n. Calculer le déterminant de A.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Caluler le déterminant de A.
   (b) Justifier que A est inversible.
   (c) Calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs.

8. $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix}$.
   (a) Caluler le déterminant de A en fonction de t.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur t pour que A_t soit inversible.