

Cours de Mathématiques

IUT Orsay

DUT INFORMATIQUE 1A - Semestre 1

2012-2013

I	Introduction
II	Wims
III	Calcul ensembliste
IV	Relations binaires, applications
V	Logique
VI	Raisonnement par récurrence, suites récurrentes
VII	Calcul matriciel
VIII	Résolution de systèmes d'équations linéaires

Partie IV : Relations binaires, applications

- A. Relations binaires entre deux ensembles
 - Premier exemple et définitions
 - Représentation matricielle
 - Egalité et inclusion
 - Relation réciproque
 - Restriction
 - Opérations ensemblistes sur les relations
 - Composée de relations
- B. Fonctions, applications
 - Définitions et propriétés
 - Applications injectives, surjectives, bijectives
- C. Relations binaires sur un ensemble
 - Exemples
 - Propriétés remarquables
- D. Relations d'équivalence
- E. Relations d'ordre, ensembles ordonnés
 - Définitions
 - Éléments remarquables

31/137

A. Relations binaires entre deux ensembles

A. 1. Premier exemple et définitions

Soit E un ensemble d'étudiants inscrits en DUT informatique.

Quels sont les semestres suivis par ces étudiants en 2012-2013 ?

E	S	
Clara	S1	
Lucas	S2	
Marc	S3	
Pierre	S4	
Quentin		
Représentation sagittale		Représentation cartésienne

	S1	S2	S3	S4
Clara	X	X		
Lucas		X	X	
Marc	X	X		
Pierre			X	X
Quentin				X

Soient E et F deux ensembles

- ▶ Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ de E vers (ou dans) F est un triplet $(E, F, G_{\mathcal{R}})$ où $G_{\mathcal{R}}$ est une partie de $E \times F$.
- ▶ E est l'**ensemble de départ** et F est l'**ensemble d'arrivée** de la relation.
- ▶ $G_{\mathcal{R}}$ est le **graphe** de la relation.
- ▶ Si $E = F$ on dit que $\mathcal{R}$ est une relation sur E .
- ▶ **Notation** : $(x, y) \in G_{\mathcal{R}}$ est noté $x\mathcal{R}y$
- ▶ $(x, y) \notin G_{\mathcal{R}}$ signifie que x n'est pas en relation avec y .

32/137

33/137

Définitions

- ▶ La relation vide de E dans F , notée $\emptyset$, est définie par $G_{\emptyset} = \emptyset$
- ▶ Si $x\mathcal{R}y$, y est une **image** de x par la relation $\mathcal{R}$ et x est un **antécédent** de y .
- ▶ L'**image** d'une partie A de E par la relation $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}(A)$, est l'ensemble des images des éléments de A .
- ▶ L'**image réciproque** d'une partie C de F par la relation $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}^{-1}(C)$, est l'ensemble des antécédents des éléments de C .

Propriétés

Si A et B sont deux parties de E

- ▶ $\mathcal{R}(A \cup B) = \mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B)$.
- ▶ $\mathcal{R}(A \cap B) \subset \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$.

Exemple

L'ensemble de départ est

$E = \{\text{Clara, Lucas, Marc, Pierre, Quentin}\}$

L'ensemble d'arrivée est $F = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$

Le graphe est

$G_{\mathcal{R}} = \{(\text{Clara}, S_1), (\text{Clara}, S_2), (\text{Lucas}, S_2), \dots, (\text{Quentin}, S_4)\}$

L'image de $A = \{\text{Clara, Lucas}\}$ est $\mathcal{R}(A) = \{S_1, S_2, S_3\}$

L'image réciproque de $B = \{S_1, S_3\}$ est

$\mathcal{R}^{-1}(B) = \{\text{Clara, Lucas, Marc, Pierre}\}$

34/137

35/137

A.2. Représentation matricielle

Si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_p\}$ sont deux ensembles finis, on définit la **matrice d'adjacence** de la relation $\mathcal{R}$ par :

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1j} & \dots & \dots & r_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ r_{i1} & \dots & r_{ij} & \dots & \dots & r_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{nj} & \dots & \dots & r_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; \forall j \in \{1, \dots, p\} \quad r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \mathcal{R} y_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Premier exemple :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,4}$$

36/137

37/137

A.4. Relation réciproque

Définition

- La **réciproque** de la relation binaire $\mathcal{R} = (E, F, G_{\mathcal{R}})$ est la relation $\mathcal{R}^{-1} = (F, E, G_{\mathcal{R}^{-1}})$ où $G_{\mathcal{R}^{-1}} = \{(y, x) \in F \times E; (x, y) \in G_{\mathcal{R}}\}$

Propriétés

- $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$
- L'image réciproque d'une partie C de F par la relation $\mathcal{R}$ est égale à l'image de C par la relation $\mathcal{R}^{-1}$
- La matrice d'adjacence de $\mathcal{R}^{-1}$ est égale à la transposée de la matrice d'adjacence de $\mathcal{R}$
- Si C et D sont deux parties de F
 - $\mathcal{R}^{-1}(C \cup D) = \mathcal{R}^{-1}(C) \cup \mathcal{R}^{-1}(D)$.
 - $\mathcal{R}^{-1}(C \cap D) \subset \mathcal{R}^{-1}(C) \cap \mathcal{R}^{-1}(D)$.

38/137

39/137

A.6. Opérations ensemblistes sur les relations

- Le **complémentaire** de la relation $\mathcal{R} = (E, F, G_{\mathcal{R}})$ est la relation

$$\overline{\mathcal{R}} = (E, F, \overline{G_{\mathcal{R}}})$$

où $\overline{G_{\mathcal{R}}}$ est le complémentaire de $G_{\mathcal{R}}$ dans $E \times F$
Comment calculer la matrice d'adjacence de $\overline{\mathcal{R}}$?

- La **réunion** de $\mathcal{R}_1 = (E, F, G_{\mathcal{R}_1})$ et $\mathcal{R}_2 = (E, F, G_{\mathcal{R}_2})$ est la relation

$$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = (E, F, G_{\mathcal{R}_1} \cup G_{\mathcal{R}_2})$$

Comment calculer la matrice d'adjacence de $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$?

- L'**intersection** de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ est la relation

$$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = (E, F, G_{\mathcal{R}_1} \cap G_{\mathcal{R}_2})$$

Comment calculer la matrice d'adjacence de $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$?

40/137

A.3. Egalité et inclusion

$\mathcal{R}_1 = (E, F, G_{\mathcal{R}_1})$ et $\mathcal{R}_2 = (E, F, G_{\mathcal{R}_2})$ sont deux relations binaires.

Définitions

- Les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont **égales** si $G_{\mathcal{R}_1} = G_{\mathcal{R}_2}$
- $\mathcal{R}_1$ est **include** dans $\mathcal{R}_2$ si $G_{\mathcal{R}_1} \subset G_{\mathcal{R}_2}$

Exemples

Déterminer $\mathcal{R}' = (E, F, G_{\mathcal{R}} \cap (A \times F))$ et $\mathcal{R}'' = (E, F, G_{\mathcal{R}} \cap (E \times B))$

A.5. Restriction

$\mathcal{R} = (E, F, G_{\mathcal{R}})$ est une relation binaire

- $A \subset E$. La **restriction de $\mathcal{R}$ à A** est la relation

$$\mathcal{R}_{/A} = (A, F, G_{\mathcal{R}} \cap (A \times F))$$

Exemple : vérifier sur l'exemple que $\mathcal{R}_{/A} \neq \mathcal{R}'$

- $B \subset F$. La **restriction de $\mathcal{R}$ à B** est la relation

$$(E, B, G_{\mathcal{R}} \cap (E \times B)) = (\mathcal{R}_{/B}^{-1})^{-1}$$

Remarque : la restriction de $\mathcal{R}$ à B ne peut pas être notée $\mathcal{R}_{/B}$

Exemple : vérifier sur l'exemple que la restriction de $\mathcal{R}$ à B est différente de $\mathcal{R}''$

A.7. Composée de relations

Définition

- La **composée** des relations $\mathcal{R} = (E, F, G_{\mathcal{R}})$ et $\mathcal{S} = (F, H, G_{\mathcal{S}})$ est la relation

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = (E, H, G_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}})$$

où

$$G_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} = \{(x, z) \in E \times H; \exists y \in F, (x, y) \in G_{\mathcal{R}} \text{ et } (y, z) \in G_{\mathcal{S}}\}$$

Comment calculer la matrice d'adjacence de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$?

Propriétés

- $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ est une relation sur E
- $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ est une relation sur F
- $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$

Exemple

41/137

B. Fonctions, applications

B. 1. Définitions et propriétés

- La relation binaire $f = (E, F, G_f)$ est une **fonction** si tout élément $x \in E$ a au plus une image dans F , notée $f(x)$.

Notation

$$f : \begin{cases} E & \mapsto F \\ x & \mapsto f(x) = y \end{cases}$$

Exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \mapsto \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

- La relation binaire $f = (E, F, G_f)$ est une **application** si tout élément $x \in E$ a exactement une image dans F , notée $f(x)$.

Notation

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E .

Propriétés

- La composée de deux fonctions est une fonction.
- La composée de deux applications est une application.
- La relation réciproque d'une application n'est en général pas une application.

Exemple

- Si E et F sont deux ensembles finis, alors $|F^E| = |F|^{|E|}$

42/137

43/137

Exemples d'applications

- L'application identique notée id :

$$id : \begin{cases} E & \mapsto E \\ x & \mapsto id(x) = x \end{cases}$$

- L'application caractéristique d'une partie A d'un ensemble E

$$1_A : \begin{cases} E & \mapsto \{0, 1\} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

- Les suites : Une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} & \mapsto \mathbb{R} \\ n & \mapsto u(n) \end{cases}$$

44/137

45/137

Applications injectives

Propriétés

- La composée de deux applications injectives est injective.
- Soient A et B deux parties de E . Si f est injective, on a

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

- Soient E et F deux ensembles finis avec $|E| = n$ et $|F| = p$.
 - Si $|E| > |F|$, alors il n'existe aucune application injective de E dans F .
 - Si $|E| \leq |F|$, alors il y a $p(p-1) \dots (p-n+1)$ applications injectives de E dans F .

46/137

47/137

B. 2. Applications injectives, surjectives, bijectives

Définitions

- L'application f de E dans F est **injective** si tout élément de F a **au plus** un antécédent dans E .
- Définition équivalente : f est **injective** si deux éléments quelconques distincts de E ont des images distinctes.

Ecriture mathématique :

- f est injective si

$$\forall (x, x') \in E \times E, \text{ si } f(x) = f(x') \text{ alors } x = x'$$

- f est injective si

$$\forall (x, x') \in E \times E, \text{ si } x \neq x' \text{ alors } f(x) \neq f(x')$$

Exemple

Applications surjectives

Définitions

- f est **surjective** si tout élément de F a **au moins** un antécédent dans E .
- Définition équivalente : f est **surjective** si $f(E) = F$

Propriétés

- La composée de deux applications surjectives est surjective.
- Soient E et F deux ensembles finis. Si $|E| < |F|$, alors il n'existe aucune application surjective de E dans F

Applications bijectives

Définitions

- f est **bijjective** si tout élément de F a **exactement** un antécédent dans E .
- Définition équivalente : f est **bijjective** si f est injective et surjective.

Propriétés

- Si f est une application bijective de E dans F , alors la relation réciproque de f , notée f^{-1} est une application bijective de F dans E .

$$f^{-1} : \begin{cases} F & \mapsto E \\ y & \mapsto x \end{cases}$$

où x est l'unique antécédent de y par f , c'est à dire l'unique $x \in E$ vérifiant $y = f(x)$

48/137

Applications bijectives

Propriétés

- Si f est bijective, on a $f^{-1} \circ f = id_E$ et $f \circ f^{-1} = id_F$.
- La composée de deux applications bijectives est bijective.
- Soient E et F deux ensembles finis avec $|E| = n$ et $|F| = p$.
 - Si $|E| \neq |F|$, alors il n'existe aucune application bijective de E dans F .
 - Si $|E| = |F|$, alors il y a $n!$ applications bijectives de E dans F . Celles-ci sont appelées des **permutations**.

49/137

C. Relations binaires sur un ensemble

C.1. Exemples

- L'égalité

$$\mathcal{R} = (E, E, G_{\mathcal{R}} = \{(x, x); x \in E\})$$

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y$$

Ecrire sa matrice d'adjacence quand E est un ensemble fini à n éléments.

- Les arbres généalogiques
- Le réseau Internet

50/137

C.2. Propriétés remarquables

$\mathcal{R}$ est une relation binaire sur un ensemble E .

Définitions

- $\mathcal{R}$ est **reflexive** si pour tout élément x de E on a $x \mathcal{R} x$.

$$\forall x \in E; x \mathcal{R} x$$

Matrice d'adjacence quand E est un ensemble fini à n éléments ?

- $\mathcal{R}$ est **symétrique** si chaque fois que $x \mathcal{R} y$, on a aussi $y \mathcal{R} x$.

$$\forall (x, y) \in E^2; (x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x)$$

Matrice d'adjacence quand E est un ensemble fini à n éléments ?

51/137

Définitions

- $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si chaque fois que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$, on a $x = y$.

$$\forall (x, y) \in E^2; [(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y]$$

Matrice d'adjacence quand E est un ensemble fini à n éléments ?

- $\mathcal{R}$ est **transitive** si si chaque fois que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, on a aussi $x \mathcal{R} z$.

$$\forall (x, y, z) \in E^3; [(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z]$$

Attention : antisymétrique ne signifie pas non symétrique

52/137

D. Relations d'équivalence

Définition

- Une **relation d'équivalence** est une relation réflexive, symétrique et transitive.

Exemples

- L'égalité
- La congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$:
 $x \mathcal{R} y$ si $x - y$ est un multiple de n .
- La relation " être né(e) la même année que " dans l'ensemble des humains

53/137

Classes d'équivalences, ensemble quotient

Définition

- La **classe d'équivalence** d'un élément x de E est

$$\bar{x} = \{y \in E, xRy\} = \{y \in E, yRx\}$$

Propriétés

- Pour tout $x \in E$, $\bar{x} \neq \emptyset$.
- $\bar{x} = \bar{y}$ si et seulement si xRy .
- $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ si et seulement si x n'est pas en relation avec y .

Propriétés

- L'ensemble des classes d'équivalences, appelé **ensemble quotient** de E par la relation R et noté :

$$E/R = \{\bar{x}, x \in E\}$$

est une partition de E

- Toute partition d'un ensemble E définit une relation d'équivalence dont les classes sont les composantes de la partition.

Exemple

54/137

55/137

E. Relations d'ordre, ensembles ordonnés

E.1. Définitions

- Une **relation d'ordre** sur un ensemble E est une relation réflexive, antisymétrique et transitive. On dit alors que E est un **ensemble ordonné**.
- Une relation d'ordre sur E est **totale** si pour tout couple (x, y) de $E \times E$, on a xRy ou yRx . On dit alors que E est un **ensemble totalement ordonné**.
- Quand la relation d'ordre n'est pas totale, on dit qu'elle est **partielle**. On dit alors que E est un **ensemble partiellement ordonné**.

Exemples

- $\leq$ sur $\mathbb{R}$; $\geq$ sur $\mathbb{R}$
- La relation divise dans $\mathbb{N}^*$
- $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$

56/137

E.2. Eléments remarquables

Définitions

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur un ensemble E .

- Si xRy , on dit que
 - x est un **minorant** de y
 - y est un **majorant** de x
 - x est **élément minimal** s'il ne possède pas d'autre minorant que lui
 - x est un **élément maximal** s'il ne possède pas d'autre majorant que lui
- Soit A une partie de E .
 - A est **minorée** s'il existe $m \in E$ qui minore tous les éléments de A . On dit alors que x est un minorant de A .
 - A est **majorée** s'il existe $M \in E$ qui majore tous les éléments de A . On dit alors que x est un majorant de A .

57/137

Définitions

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur un ensemble E et A est une partie de E .

- x est un **plus petit élément** de A s'il appartient à A et si c'est un minorant de A .
- x est un **plus grand élément** de A s'il appartient à A et si c'est un majorant de A .
- S'il existe, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A dans E est appelé la **borne inférieure** de A .
- S'il existe, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A dans E est appelé la **borne supérieure** de A .

Propriétés

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur un ensemble E et A est une partie de E .

- Lorsque le plus petit élément de A existe, il est unique.
- Lorsque le plus grand élément de A existe, il est unique.
- Si A admet un PGE alors ce PGE est égal à $\sup A$.
- Si A admet un PPE alors ce PPE est égal à $\inf A$.

58/137

59/137

E. 3. Diagramme de Hasse d'une relation d'ordre

Problème

Comment bien visualiser une relation d'ordre ?

Définitions

- ▶ y est un **successeur immédiat** de x si $x\mathcal{R}y$, $x \neq y$ et il n'existe pas d'élément z tel que $x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}y$.
- ▶ Diagramme de Hasse : on ne trace que les flèches qui relient chaque sommet à ses successeurs immédiats

Théorème

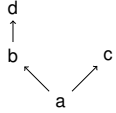
x mineure y si on peut passer de x à y en suivant les flèches du diagramme.

Exemples

$x \backslash y$	a	b	c	d
a	X	X	X	X
b		X		X
c			X	
d				X

Relation

Diagramme de Hasse

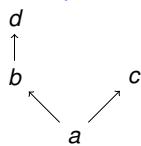


Soit la relation d'ordre $\leq$ sur $E = \{0, 1, \dots, 9\}$.

Diagramme de Hasse :

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$

Exemple



a est minimal, c est maximal, d est maximal
 a est le plus petit élément de $E = \{a, b, c, d\}$
Il n'y a pas de plus grand élément de E .