Université de Strasbourg
Première année de licence
Semestre 1

Algorithmique et Programmation 1

TD1 : Logique

1 Les fonctions logiques

1.1 Opérateurs ET et OU

Soient deux fonctions logiques à 4 variables logiques f et g définies par :

$$\begin{aligned} f : \{0,1\}^4 &\rightarrow \{0,1\} \\ (x,y,z,t) &\mapsto x.y.z.t \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} g : \{0,1\}^4 &\rightarrow \{0,1\} \\ (x,y,z,t) &\mapsto x+y+z+t \end{aligned}$$

1. Supposons que $x = 0$. On ne connaît pas la valeur des autres variablrs. Est-ce qu'on peut dire quelque chose de la valeur de $f(x,y,z,t)$? et de celle de $g(x,y,z,t)$?
2. Même question en supposant que $x = 1$.

Réponse :

— Si $x = 0$, on peut dire que $f(x,y,z,t) = 0$ car si une des opérandes de l'opérateur ET est 0 alors le résultat est 0 quelque soit la valeur de l'autre opérande. Par contre, on ne peut rien dire sur $g(x,y,z,t)$

— Si $x = 1$, on peut dire que $g(x,y,z,t) = 1$ car si une des opérandes de l'opérateur OU est 1 alors le résultat est 1 quelque soit la valeur de l'autre opérande. Par contre, on ne peut rien dire sur $f(x,y,z,t)$.

1.2 Les fonctions logiques à une variable logique

Toute fonction logique f à une variable logique associe une valeur logique (0 ou 1) à une autre valeur logique. Sa table de vérité peut toujours s'écrire de la façon suivante :

x	f(x)
0	0 ? 1 ?
1	0 ? 1 ?

Ce sont les valeurs qu'on met dans la seconde colonne qui définissent la fonction. Combien existe-t-il de fonctions logiques à une variable logique ? Donner leur table de vérité.

Réponse : Il y a $2^2 = 4$ fonctions logiques à une variable logique

x	f(x)
0	0
1	1

La fonction *identité*

x	f(x)
0	1
1	0

La fonction NON

x	f(x)
0	1
1	1

La *tautologie*

x	f(x)
0	0
1	0

L'*antinomie*

— Une *tautologie* est une fonction logique qui est vraie quelque soit la valeur de ses variables.

— Une *antinomie* est une fonction logique qui est fausse quelque soit la valeur de ses variables.

1.3 Les fonctions logiques à deux variables logiques

Toute fonction logique g à deux variables logiques associe une valeur logique à deux autres valeurs logiques x et y. Sa table de vérité peut toujours s'écrire de la façon suivante. Là aussi, ce sont les éléments de la dernière colonne qui déterminent le comportement de la fonction.

x	y	g(x,y)
0	0	0 ? 1 ?
0	1	0 ? 1 ?
1	0	0 ? 1 ?
1	1	0 ? 1 ?

Combien existe-t-il de fonction logique à deux variables logiques ? (Vous n'avez pas besoin de présenter leur tableau de vérité).

Réponse : Il en existe $2^4 = 16$.

2 Tables de vérité

2.1 Calcul de tables avec deux variables

Donner les tables de vérité des fonctions logiques suivantes. Pour ce faire, la façon infaillible (mais pas toujours la plus rapide) est de prendre le tableau ligne par ligne et de calculer la valeur de la fonction pour chaque valeur possible des variables.

1. $f(x, y) = x.y$
2. $g(x, y) = x.\overline{y}$
3. $h(x, y) = \overline{x}.y$
4. $i(x, y) = \overline{x}.\overline{y}$
5. $j(x, y) = x + y$
6. $k(x, y) = x + \overline{x}.y$
7. $l(x, y) = x.\overline{y} + \overline{x}.y$
8. $m(x, y) = x.y + \overline{x}.y + x.\overline{y}$
9. $n(x, y) = x.y + \overline{x}.\overline{y}$
10. $o(x, y) = \overline{x} + y$

Parmi ces fonctions, identifier celles qui sont identiques. Comparer ces tables de vérité avec celles vues en cours. En déduire une expression de :

— $x \oplus y$

— $x \odot y$

— $x \Rightarrow y$

— $x \overline{\Rightarrow} y$

en fonction de x et de y avec les opérateurs ET, OU et NON.

Réponse :

x	y	x.y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x.\overline{y}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

x	y	$\overline{x}.y$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

x	y	$\overline{x}.\overline{y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x + \overline{x}.y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x.\overline{y}+\overline{x}.y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x	y	$x.y+x.\overline{y}+\overline{x}.y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x.y+\overline{x}.\overline{y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$\overline{x}+y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

— Les fonctions j, k et m sont identiques.

— La fonction g correspond à l'opérateur *inhibition* donc $x \not\Rightarrow y = x.\overline{y}$

— La fonction l correspond à l'opérateur *OU exclusif* donc $x \oplus y = x.\overline{y}+\overline{x}.y$

— La fonction n correspond à l'opérateur *Équivalence* donc $x \odot y = x.y+\overline{x}.\overline{y}$

— La fonction o correspond à l'opérateur *Implication* donc $x \Rightarrow y = \overline{x}+y$

Remarque : Le *produit* de toutes les variables avec ou sans barre est appelé un *cube*. Avec deux variables, il existe 4 cubes : $x.y$, $\overline{x}.y$, $x.\overline{y}$ et $\overline{x}.\overline{y}$ correspondant aux 4 premières fonctions : f, g, h et i. La table de vérité d'un cube contient des 0 partout sauf sur une ligne. Lorsqu'on peut représenter une fonction sous la forme d'une somme de cubes (fonctions l, m et o, alors la table de vérité de ces fonctions contient des 0 partout sauf sur les lignes correspondant à ces cubes. Par exemple $l(x, y)$ contient des 0 partout sauf sur la ligne correspondant à $x.\overline{y}$ et à celle correspondant à $y.\overline{x}$.

2.2 Calcul de tables avec trois variables

Fort de notre expérience, essayons de faire les tables de vérité sans systématiquement calculer la valeur de la fonction pour chaque ligne. Quelle est la table de vérité pour :

1. $f(x, y, z) = x.y.z$
2. $g(x, y, z) = \overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$
3. $h(x, y, z) = x.\overline{y}.\overline{z}$
4. $i(x, y, z) = \overline{x}.\overline{y}.z$
5. $j(x, y, z) = x.y.z+\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$
6. $k(x, y, z) = \overline{x}.\overline{y}.z+x.\overline{y}.\overline{z}$

Réponse :

Les quatre premières fonctions sont des cubes. Donc les tables contiennent des 0 partout sauf sur les lignes où toutes les variables valent 1. Les deux dernières fonctions sont des sommes des fonctions précédentes.

x	y	z	$x.y.z$
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

x	y	z	$\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

x	y	z	$x.\overline{y}.\overline{z}$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

x	y	z	$\overline{x}.\overline{y}.z$
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

x	y	z	$x.y.z+\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

x	y	z	$\overline{x}.\overline{y}.z+x.\overline{y}.\overline{z}$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

De cette façon, quelque soit la table de vérité, vous pouvez toujours en donner une expression en fonctions des variables.

3 L'implication logique

Il est peut-être difficile de voir le lien entre l'implication logique que vous utilisez tous les jours dans vos raisonnements et l'opérateur logique vu en cours.

Un éleveur possède des lapins blancs et des lapins noirs. Or un grand nombre de ces lapins tombe malade. En voyant son élevage, il a l'impression que les lapins noirs sont tous sains. Autrement dit, il fait l'hypothèse que :

$$\text{(lapin noir)} \Rightarrow \text{(sain)}$$

Nous allons l'aider à vérifier si cette implication est vraie ou non. Passons en revue tous les lapins, un par un.

1. Parmi les 4 cas possibles, déterminer celui ou ceux qui sont conformes à l'hypothèse et celui ou ceux qui démentent l'hypothèse d'implication.
   - un lapin blanc sain ;
   - un lapin noir sain ;
   - un lapin blanc malade ;
   - un lapin noir malade.
2. On définit :
   - la variable logique x qui vaut 1 si le lapin est noir et 0 si le lapin est blanc
   - la variable logique y qui vaut 1 si le lapin est sain et 0 si le lapin est malade.

   Ainsi notre hypothèse s'écrit $x \Rightarrow y$. Reprendre les 4 cas mentionnés à la question précédente et les placer dans une table de vérité en mettant 1 lorsque le cas est conforme à l'implication et 0 lorsque le cas la dément.

Réponse :

1. L'implication n'énonce rien au sujet des lapins blancs donc aucun lapin blanc ne peut démentir l'hypothèse d'implication. Le seul cas qui peut la démentir est celui d'un lapin noir malade.
   - un lapin blanc sain : conforme ;
   - un lapin noir sain : conforme ;
   - un lapin blanc malade : conforme ;
   - un lapin noir malade : démentirait l'implication
2. La seule valeur qui dément l'implication est $x.\overline{y}$ c'est à dire $x\overline{\Rightarrow}y$. Il en résulte, pour l'implication, la table suivante :

x	y	$x \Rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

   qui est bien la table vue en cours.

4 Pour aller plus loin

4.1 La fonction $NAND$

La fonction *NAND* est une fonction universelle dans le sens où toute fonction logique, quelqu'elle soit, peut être écrite exclusivement en composant des fonctions *NAND*. On rappelle que $NAND(x, y) = \overline{x.y}$.

1. Quelle est la valeur de $\overline{x.x}$?
2. En déduire une expression de $\overline{x}$ au moyen de la fonction $NAND$ (sans utiliser la fonction NON, ET ou OU).
3. En déduire une expression de $x.y$ au moyen de la fonction $NAND$. *Indice :* remarquer que $x.y = \overline{\overline{x.y}}$
4. Même chose pour $x + y$. *Indice :* remarquer que $x + y = \overline{\overline{x + y}}$ et penser au théorême de *Demorgan*.

Réponse :

1. $\overline{x.x} = \overline{x}$
2. Donc $\overline{x} = NAND(x, x)$
3. $x.y = \overline{\overline{x.y}} = \overline{NAND(x, y)}$. Or on sait (question précédente) que $\overline{X} = NAND(X, X)$ donc (en remplaçant X par $NAND(x, y)$) :
$$x.y = \overline{NAND(x, y)} = NAND(NAND(x, y), NAND(x, y))$$
4. $x + y = \overline{\overline{x + y}}$ or d'après le théorôme de *Demorgan*, $\overline{x + y} = \overline{x}.\overline{y}$. Donc :
$$x + y = \overline{\overline{x + y}} = \overline{\overline{x}.\overline{y}} = NAND(\overline{x}, \overline{y}) = NAND(NAND(x, x), NAND(y, y))$$

4.2 Des propositions logiques portant des ensembles

Nous allons avoir recours à des quantificateurs : $\forall$ (quelque soit) et $\exists$ (il existe).

Supposons que nous ayons des ensembles d'entiers. Ces entiers peuvent être pairs ou impairs. La proposition suivante :
$$(\forall x \in A)(\text{x est pair}) \tag{1}$$
peut être vraie pour certains ensembles et fausse pour d'autres.

1. Écrire une proposition qui soit le contraire exacte de la proposition (1). Autrement dit, écrire une proposition qui soit toujours vraie quand (1) est fausse et vice-versa.
2. Il n'est pas immédiat de déterminer si la proposition (1) est vraie ou fausse pour $A = \emptyset$. Que pensez-vous de la proposition contraire trouvée à la question précédente : est-elle vraie ou fausse pour un ensemble vide ? En déduire ce qu'il en est pour (1).

Réponse :

1. La proposition contraire est : $(\exists x \in A)$ (x n'est pas pair)
2. Dans le cas d'un ensemble vide, toute proposition commençant par $(\exists x \in \emptyset)$ est nécessairement fausse, et ce, quelque soit la proposition qui suit. Il s'en suit que toute proposition commençant par $(\forall x \in \emptyset)$ est toujours vraie. En particulier :
   — $(\forall x \in \emptyset)$ (x est pair) est vraie ;
   — $(\forall x \in \emptyset)$ (x est impair) est vraie aussi (!) ;