Algorithmique PEIP2

TP4 : Projet

Le but de ce mini projet est d'implémenter des opérations classiques de géométrie dans le plan. Ce projet est **optionnel**. Les rendus devront se faire par mail à votre chargé de TP, au plus tard le 30 janvier 2022 à 23h59. Les rendus de qualité donneront jusqu'à 2 points bonus à la note de l'examen. Pour être considérés, les rendus doivent comprendre un fichier *prenom_nom.py* pouvant se lancer directement depuis un terminal avec l'instruction `python3 prenom_nom.py`, et un rapport *prenom_nom.pdf* qui décrit et justifie les choix d'implémentation pour chaque question. Le rapport doit suffir à comprendre le fonctionnement du programme, sans avoir à en lire le code. Les rendus en retard (même de quelques minutes) ne seront pas considérés. Les rendus peuvent se faire par binômes.

1 Dessins dans le plan avec le module Turtle

Nous représentons les points dans le plan à l'aide de la classe python `Point` définie comme suit.

```
class Point:
   def __init__(self,i,j):
      self.x = i
      self.y = j

   def __repr__(self):
      return "("+str(self.x)+","+str(self.y)+")"

   def __eq__(self,other):
      return self.x==other.x and self.y==other.y
```

Cette classe nous permet de construire un point de coordonnées (x, y) par un appel à `Point(x,y)` (via la fonction `__init__`). Elle permet également l'affichage d'un point par l'instruction `print` standard de Python (via la fonction `__repr__`). Enfin, elle permet de tester l'égalité entre deux points (via la fonction `__eq__`). Étant donné un point `p`, nous avons accès aux deux variables `p.x` et `p.y` qui représentent ses coordonnées.

Nous définissons en outre des variables globales qui délimitent les coordonnées des points que nous allons construire au sein de ce projet.

```
min_x = -200
max_x = 200
min_y = -200
max_y = 200
```

1. Écrire une fonction `randpoint()` qui renvoie un point dont les coordonnées sont aléatoires et uniformes au sein du rectangle de coin inférieur gauche `(min_x,min_y)` et de coin supérieur droit `(max_x,max_y)`.

Afin de mieux visualiser le déroulement des algorithmes mis en place au cours de ce projet, nous allons utiliser un affichage graphique. Pour cela, nous utilisons les fonctions mises à disposition par le module `turtle` de Python, dont la documentation est disponible à cette adresse : `https://docs.python.org/3/library/turtle.html`. De manière informelle, ce module permet de déplacer un curseur au sein d'une fenêtre graphique, en traçant (après un appel à `turtle.pendown()`) ou non (après un appel à `turtle.penup()`) des formes sur son passage.

Afin d'accélérer au maximum l'affichage graphique de l'exécution des algorithmes, le programme contiendra les instructions suivantes en préambule du code.

```
turtle.speed(0)
turtle.hideturtle()
```

Afin que la fenêtre graphique reste visible lors de son exécution depuis un terminal, le programme se terminera par l'instruction suivante.

```
turtle.Screen().exitonclick()
```

2. Écrire une fonction `drawpoint(p)` qui dessine un point aux coordonnées du point `p`, à l'aide de la fonction `turtle.dot`. Attention à ne rien dessiner de plus que le point !

3. Écrire une fonction `drawpoly(l)` qui dessine le polygone donné par la liste `l` de ses sommets. Ce polygone peut s'auto-intersecter.

4. Écrire une fonction `trigosort(l,p)` qui prend en argument un nuage de points `l` et un point pivot `p`, et qui trie les éléments $q \in$ `l` par ordre croissant selon l'angle (compris dans l'intervalle $[0, 2\pi[$) que forme le vecteur $\overrightarrow{pq}$ avec l'axe des abscisses. On utilisera pour cela la fonction `sorted` de Python, avec la clé appropriée. On rappelle que cette fonction est de complexité $O(n \ln n)$ sur une entrée de taille n. La documentation de cette fonction est disponible à l'adresse suivante : `https://docs.python.org/fr/3/howto/sorting.html`.

5. Tester les fonctions précédentes en construisant un nombre `N=100` de points aléatoires, puis en traçant le polygone non-intersectant obtenu en les considérant dans l'ordre induit par le pivot $(0, 0)$.

2 Enveloppe convexe

L'enveloppe convexe d'un nuage (fini) de points X est le plus petit polygone convexe P tel que X est entièrement contenu à l'intérieur de P. Le but de cette partie est d'implémenter un algorithme qui construit l'enveloppe convexe d'un nuage de points, de façon efficace.

L'algorithme que nous allons utiliser à cette fin fonctionne en deux temps. Il commence par trouver un point pivot p_0 d'ordonnée minimale dans X. On trie ensuite les points $q \in X$ par ordre croissant selon l'angle que forme le vecteur $\overrightarrow{p_0q}$ avec l'axe des abscisses. Enfin, on construit l'enveloppe convexe P en partant de la liste `[`p_0`]`, et en ajoutant les points de X un par un selon l'ordre établi, en retirant les derniers ajoutés si la ligne brisée formée par P devient non convexe. Une animation de cet algorithme est disponible à l'adresse suivante : `https://www.lri.fr/~fpirot/teaching/peip2/convex.gif`.

1. Écrire une fonction `convexhull(l)` qui renvoie l'enveloppe convexe du nuage de points contenu dans la liste `l`, sous la forme de la liste de ses sommets.

2. Quelle est la complexité d'un appel à `convexhull(l)`, en fonction du nombre n de points dans `l` ?

3. Écrire une fonction `drawconvexhull(l)` qui calcule l'enveloppe convexe de `l`, et dessine au passage les étapes du calcul de manière similaire à l'animation citée plus haut. On pourra utiliser la fonction `turtle.undo()` qui efface le dernier tracé effectué.

4. Tester la fonction `drawconvexhull` sur le nuage de points aléatoire de la section précédente. Tester la fonction `convexhull` sur le plus grand nombre possible de points de sorte que le temps d'exécution soit de l'ordre de 1 seconde. Quelle est la taille obtenue ?

3 Diamètre en temps linéaire

Le but de cette section est d'implémenter un algorithme de complexité linéaire permettant de calculer le diamètre d'un polygone convexe.

Soit P un polygone convexe. Deux sommets $x, y \in P$ sont *antipodaux* s'il existe deux droites parallèles tangentes au polygone P en x et en y respectivement. Il est clair que le point x d'ordonnée minimale et le point

y d'ordonnée maximale dans P forment une paire de points antipodaux. En faisant tourner P juste assez pour qu'un de ces deux points changent, on trouve une nouvelle paire de points antipodaux. En répétant cette opération jusqu'à avoir fait une rotation de 180^o de P, on trouve toutes les paires possibles de points antipodaux dans P. Une animation de cet algorithme est disponible à l'adresse suivante : `https://www.lri.fr/~fpirot/teaching/peip2/diameter.gif`

1. En utilisant le principe décrit ci-dessus, montrer qu'un polygone P à n sommets contient exactement n paires de points antipodaux, en supposant qu'il ne contient pas de côtés parallèles.

2. Écrire une fonction `AntipodalPair(l)` de complexité linéaire qui retourne les indices dans `l` de deux points antipodaux dans un polygone convexe décrit par la liste `l` de ses sommets.

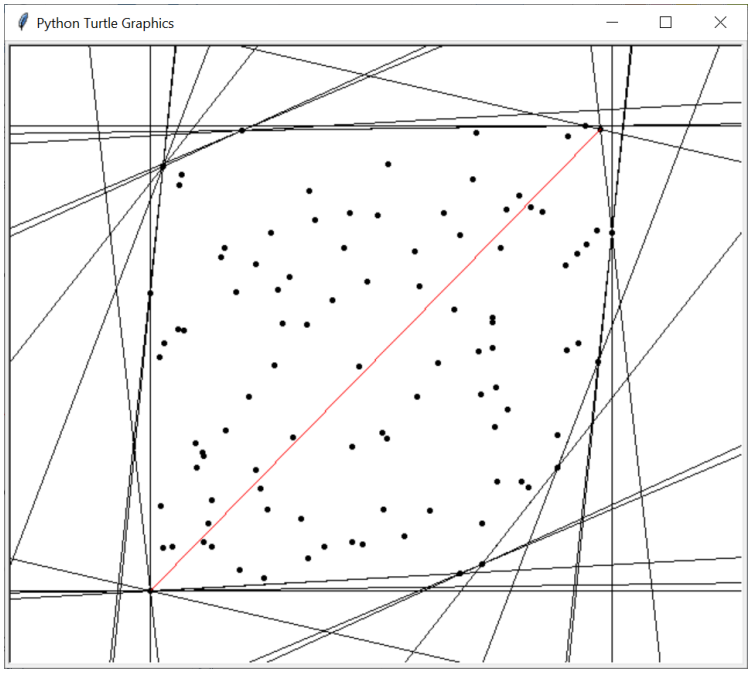
3. Écrire une fonction `NextAntipodalPair(l,i,j)` qui renvoie la paire de points antipodaux suivante selon la procédure décrite ci-dessus, en partant d'une paire de points antipodaux (i, j). Cette fonction devra être de complexité $O(1)$.

4. Le diamètre d'un polygone convexe est la distance maximale réalisée par une paire de points antipodaux. En utilisant cette propriété, écrire une fonction `diameter(l)` de complexité linéaire calculant le diamètre d'un polygone convexe `l`.

5. Écrire unefonction `drawdiameter(l)` de complexité linéaire calculant le diamètre d'un polygone convexe `l`, et qui dessine les étapes du calcul de manière similaire à l'animation citée plus haut, et trace en rouge le diamètre du polygone en fin de calcul.

6. Tester la fonction `diameter` sur le plus grand polygone convexe possible de sorte que le temps d'exécution soit de l'ordre de 1 seconde. Quelle est la taille obtenue ?

7. Appliquer la fonction `drawdiameter` au polygone convexe obtenu par l'enveloppe convexe du nuage de point de la section précédente. Quelle est la complexité du calcul du diamètre d'un nuage de points quelconque ?



Un exemple de la sortie graphique attendue à la fin de votre programme.