université
PARIS-SACLAY

Langages Formels 2024—2025
TDs + Projet, Frédéric Gruau

Plan

Le cours est divisé en six périodes de deux semaines, avec l'enchainement des six thèmes suivants : a-Rappels, b-approfondissement automates, c- Grammaires Hors Contexte, d-Automates à piles, e- analyse syntaxique ascendantes, f- Machine de Turing. L'enchaînement est une construction logique, c'est à dire qu'il est nécessaire d'assimiler les concepts au fur et à mesure, pour pouvoir continuer à suivre jusqu'au bout. En particulier, les éléves n'ayant jamais vus d'expressions rationnelles ni d'automates d'états finis, doivent fournir un effort considérable les deux premières semaines (rappels), pour se mettre à niveau avec le reste. Ce recueil de TD et le support de cours se trouvent sur ma home page `https://www.lri.fr/~gruau/`

Les exercices marqués "optionnels" sont plus difficiles. Ils sont conçus pour occuper les étudiants très à l'aise, ou vous permettre de travailler chez vous et approfondir. Ils ne sont en général pas traités avec toute la classe par manque de temps. Vous trouverez un corrigé (parfois un peu elliptique) tout à la fin. Certains exercices plus importants ou plus difficiles sont répartis sur deux TDs : le premier TD traite un exemple facile, et le TD de la semaine suivant un deuxième exemple plus difficile. C'est le cas pour les automates d'état finis (TD 1 et 2), la résolution d'équations de langages (TD 2 et 3), est-il-algébrique (TD 6,7 et 8, car il y a plusieurs méthodes), l'analyse ascendante (TD 9 et 10), les machine de Turing (TD 10 et 11).

Examens, projet, Rattrapage.

Seules les notes manuscrites, et les poly de cours et d'exercices sont autorisés aux examens. Chaque TD fait l'objet d'un exercice au partiel ou à l'examen. Le partiel et l'examen comprennent aussi des questions de cours non traitées en TD. Le programme du partiel porte sur les tds et cours fait avant le partiel, le programme de l'examen de mai porte sur les tds et cours fait aprés le partiel. L'examen de rattrapage en juin, porte sur tout le semestre. Deux semaines avant chacun des trois examens, vous aurez l'annale de l'année derniére avec son corrigé, sur ecampus. Vous aurez le corrigé des examens, à la sortie de la salle d'examen, si vous restez jusqu'au bout. Le mini projet est relativement facile, mais sur un coefficient de seulement 10 pourcent par rapport au partiel. Contrôle continu = (9* partiel + projet)/10. L'énonce du projet est inclus dans ce recueil. Le mini projet permet de rattraper un peu les notes de partiels de un ou deux points. Il n'est pas optionnel, donc avoir la note zéro en revanche, va baisser votre note de partiel de un ou deux points, ce qui est un peu dommage, vu que le mini projet est réellement mini, et ne vous prendra pas plus que quelques heures. Une semaine ou deux après le partiel, vos copies seront distribuées en fin de TD, vous pourrez les regarder, et ensuite vous les rendez. Si vous ratez ce TD, vous ne pourrez pas les consulter ensuite.

1 Démonstration d'égalité entre deux langages

Les égalités suivantes sont elles vraies ? si oui, le démontrer sinon donner un contre-exemple.

1. $L^* = L^*.L^* = (L^*)^*$
2. $L.(M \cap N) = (L.M) \cap (L.N)$
3. Optionnel : $(L^*.M)^* = \{\epsilon\} + (L + M)^*.M$

2 Expression rationnelle

2.1 Langage sur l'alphabet {a,b}

$L_1 = \{w \mid w$ commence par $ab\}$
$L_2 = \{w \mid w$ termine par $bb\}$
$L_3 = \{w \mid w$ commence par ab et termine par $bb\}$
$L_4 = \{w \mid w$ contient trois occurrences successives de la lettre $a\}$
$L_5 = \{w \mid w$ ne commence pas par $ba\}$
$L_6 = \{w \mid w$ ne termine pas par $bba\}$

2.2 optionnel : ExprRat compliqué.

$L_7 = \{w \mid w$ ne contient pas deux occurrences successives de la lettre $a\}$
$L_8 = \{w \mid w$ ne contient pas trois occurrences successives de la lettre $a\}$
$L_9 = \{w \mid$ le nombre de a dans w est pair $\} = \{w \mid |w|_a = 0 \ (mod\ 2)\}$
$L_{10} = \{w \mid |w|_a = 1 \ (mod\ 3)\}$

2.3 ExprRat pour l'analyse lexicale.

La première étape d'un compilateur et l'analyse lexicale, qui découpe le texte d'un programme en unités lexicales appelée "token". Un token peut être un mot clef, un identifiant, une constante numérique. On utilise des expression rationnelle

pour identifier la nature des différents token. On utilisera la notation "étendue"" plus compacte. Par exemple, $e? = e|\epsilon$ qui signifie que e est optionnel, $[0-9]$ signifie un chiffre.

Ecrire l'expression rationnelle décrivant :

1. un identificateur comme une lettre suivit d'une suite de lettre ou de chiffre,
2. un entier positif
3. un entier relatif
4. un nombre à virgule

3 Automates reconnaissant un langage donné.

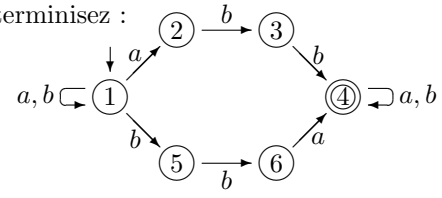
Donner des automates reconnaissant les langages suivants : les entiers sont codés en binaire. Pour les entiers comme pour les mots habituel, on considère que les caractères sont lus de gauche a droite, donc en commençant par les bits de poids forts. On donnera les version déterministes, en commencant éventuellement pas les non-déterministes dans les cas ou c'est plus facile.

- des entiers pairs, des entiers impairs, des puissances de 2
- $A = \{0,1\}, L = \{w \mid w$ code une puissance de $4\}$
- $A = \{0,1\}, L = \{w \mid w$ code la somme de deux puissances de 4 distinctes : $4^k + 4^{k'}, k \neq k'\}$.
- $A = \{a,b\}$, $L = \{w \mid w$ commence par $abaaba\}$
- $A = \{a,b\}$, $L = \{w \mid w$ contient $aabaaab\}$
- $A = \{a,b\}$, $L = \{w \mid w$ commence par abb et termine par $bba\}$
- Les écritures de nombre à virgule
- $A = \{a,b,c\}, L = \{w \mid w$ contient au moins une fois chacune des trois lettres $\}$
- $A = \{a,b\}$, $L = \{w \mid |w|_a$ est pair, ainsi que $|w|_b\}$
- Optionnel $A = \{a,b\}$, $L = \{w \mid w$ contient un nombre pair de fois le facteur $bab\}$
- Optionnel. $A = \{0,1\}$, $L = \{w \mid$ en base 2, w représente un nombre valant 1 modulo 3 $\}$

4 Déterminisation

4.1 Méthode de déterminisation.

Déterminisez :



4.2 Boum !

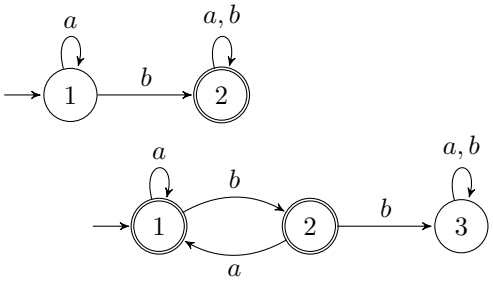
Soit L_n l'ensemble des mots sur $\{a,b\}$ de longueur au moins n dont la $n^{\text{ième}}$ lettre avant la fin est un b. Donnez un petit automate non-déterministe pour L_3. puis son déterminisé. Comparez leur nombre d'états. Au lieu de faire marcher l'algorithme de déterminisation, on commencera par réfléchir quels doivent être les états, puis on rajoutera les transitions.

5 Resolution d'équations

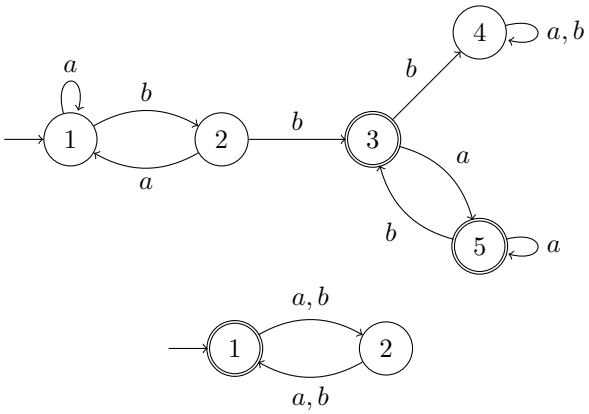
Rappel de cours : à tout automate on peut associer un système d'équations dont les variables représentent les langages reconnus par cet automate à partir de chacun de ses états.

5.1 Exemple à faire

À l'aide du système d'équations précédent, que l'on résoudra par élimination et utilisation du lemme d'Arden, déterminer une expression rationnelle correspondant aux automates suivants : (sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a,b\}$)



5.2 Exemple optionnel.



6 Construction d'automates.

6.1 Construction classiques

L est reconnu par l'automate $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$. Construire des automates reconnaissant :

- $miroir(L) = \{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 | a_1 a_2 ... a_n \in L\}$

— l'ensemble des mots obtenus a partir des mots de L en effaçant tous les a.
— le complémentaire de L, en supposant A déterministe.
— Optionnel : les mots obtenus en effaçant un nombre pair de lettres d'un mot de L

6.2 Construction du produit synchronisé pour l 'intersection.

L_1 et L_2 sont reconnus par les automates A_1 et A_2, supposés déterministes complets.
— Donner un algorithme linéaire en $|u|$ pour savoir si $u \in L_1 \cap L_2$.
— En déduire la construction d'un automate déterministe reconnaissant l'intersection. il s'appelle le "produit synchronisé".
— Construire également un automate déterministe reconnaissant l'union
— Les constructions précédentes s'adaptent-elles aux automates non complet ?non-déterministes ?

6.3 Optionnel : Le barman boxeur

Un très bon exercice ludique, de Laurent Rosaz : il met en jeu des techniques de construction d'automate, il permet de bien comprendre comment le non-détermisme est fondamental pour modéliser certain problèmes.

Un barman et un client jouent au jeu suivant : Le barman met un bandeau sur les yeux qui le rend aveugle, et il met des gants de boxe qui l'empêchent de "sentir" si un verre est à l'endroit ou à l'envers. Devant le barman, se trouve un plateau tournant sur lequel sont placés quatre verres en carré. Ces verres peuvent être à l'envers ou à l'endroit. Le sens des verres est choisi par le client et est inconnu du barman. Si les verres sont tous dans le même sens, alors le barman gagne (Quand le barman gagne, un autre client, "arbitre", annonce qu'il a gagné et le jeu s'arrête.) Le barman peut répéter 10 fois l'opération suivante : Il annonce au client qu'il va retourner certains verres (par exemple le verre en bas à gauche et celui en bas à droite). Le client fait alors tourner le plateau, puis le barman retourne les verres comme il l'a annoncé. Si les verres sont alors tous dans le même sens, le barman gagne.

1)On se place du point de vue du client. Donnez un automate dont les états sont les différentes configurations du plateau, les lettres les coups annoncés par le barman et où les flèches décrivent les évolutions possibles des configurations. Le fait que 1- le client fait tourner le plateau comme il veut, et 2- on ne se préoccupe pas que tout les verres soit a l'endroit, mais seulement qu'ils soient dans le même sens, conduit à beaucoup simplifier : il y a seulement quatre états à distinguer, et seulement trois coups possibles à jouer, pour passer d'un état à un autre.

2) A partir de l'état ou 2 verres a Cote l'un de l'autre dans un sens et les 2 autres dans l'autre, donner une séquence de coup permettant au barman de gagner. Comme on a utilisé une seule lettre pour nommer les coups, cette suite corresponds à un mot d'un langage formel.

3) Donnez un automate non déterministe (avec éventuellement plusieurs états entrée) qui donne toutes les séquences d'annonces les bons choix).

4) Donnez un automate qui donne les coups qui assurent au barman de gagner quel que soit le comportement du client. On utilisera le résultat suivant : Soit A un automate détérministe complet qui reconnaît un langage L, pour obtenir un automate qui reconnaît le complémentaire, il suffit d'inverser final/ non-final. Attention, cette méthode ne marche pas si A est non-deterministe ou si A est non-complet.

5) Jouez-vous de l'argent contre le barman ?

7 DM

7.1 Partie sur papier, à rendre sur eCampus avant le 25/01 23 :59

Cette partie est à faire en monome. Il faut rendre un manuscrit (écrit à la main), sur ecampus. Vous scanner votre copie au téléphone avec adobeScan par exemple, et vous l'appeler PierretteDupont.pdf.

Dans ce devoir, on se propose d'écrire une fonction de test (en pseudo langage) d'appartenance d'un mot au langage $L(r)$ défini par une expression rationnelle r. Les expressions rationelles seront écrites comme en td. Elles utilisent donc les symboles suivants : les caractères de l'alphabet, epsilon, ensemble vide, les symboles de parenthésage et d'espacement et les trois symboles '+', '.' et '*'.

On utilisera dans ce DM, la notion de définition par induction. On peut définir des fonction booléennes sur des expressions rationnelles par inductions, par exemple pour savoir si le langage décrit contient au moins un mot non vide, la fonction booléenne "contient" sera définie par :
— contient(ϵ)= faux
— pour tout lettre l contient (l)= vrai
— contient (vide)=faux tout exressions e_1 , e_2
— contient(e_1 + e_2)=contient(e_1) ou contient(e_2)
— contient($e_1.e_2$)=(contient(e_1) et nonVide(e_2)) ou (contient(e_2)et nonVide(e_1))
— contient(e_1)) = contient (e_1)

1. Définir une fonction booléenne par induction `contient_epsilon` qui détermine si le mot vide ϵ appartient au langage défini par une expression rationnelle donnée.
2. On utilise la notion de résidu d'une expression rationnelle par rapport à un caractère qui est

le langage :

$$Res(r,c) = \{\ w \mid cw \in L(r)\ \}$$

Donner $Res(r,c)$ dans le cas où $r = (a|b)^*a$ et $c \in \{a,b\}$.

3. Le langage $Res(r,c)$ peut lui-même être décrit par une expression rationnelle. Donner les expressions rationnelles correspondant aux deux résidus de la question précédente.
4. Définir une fonction récursive `residu` calculant à partir d'une expression rationnelle r et d'un caractère c une expression rationnelle r' telle que $L(r') = Res(r,c)$.
5. En déduire une fonction `reconnait` qui détermine si une liste de caractères appartient au langage défini par une expression rationnelle donnée.

7.2 Partie sur ordi, à rendre sur eCampus avant le 08/02 23 :59

Cette partie est à faire en binome. L'usage du langage Caml est obligatoire, cela vous permet de faire un programme court et élegant. Si vous n'avez jamais programmé en Caml mettez vous en binome avec quelqu'un qui connait. Vous laisserez sur ecampus une archive PierretteDupontJeanDurand.tar.gz ou Pierette et Jean sont les binomes. Comme cela je risque moins de me tromper dans l'attribution des notes. Le projet consiste à implémenter l'algorithme mis en place dans le devoir en Caml. Celui ci prend en entrée une chaine de caractères et une expression rationnelle et détermine si la chaine de caractères est un mot du langage défini par l'expression rationnelle.

Les expressions rationnelles seront représentées par des objets du type Caml.

1. Définir une fonction `contient_epsilon` : `expreg` → `bool` qui détermine si le mot vide ϵ appartient au langage défini par une expression rationnelle donnée.
2. On définit le *résidu* d'une expression rationnelle r par rapport à un caractère c de la manière suivante :

$$Res(r,c) = \{\ w \mid cw \in L(r)\ \}$$

   (a) Calculer $Res(r,c)$ dans le cas où $r = (a|b)^*a$ et $c \in \{a,b\}$.

   (b) Le langage $Res(r,c)$ peut lui-même être décrit par une expression rationnelle. Écrire une fonction `residu` : `expreg` → `char` → `expreg` calculant à partir de r et de c une expression rationnelle r' telle que $L(r') = Res(r,c)$.

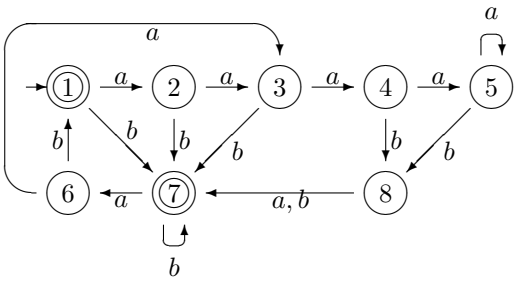
   (c) Calculer `residu` r c dans le cas où $r = (a|b)^*a$ et $c \in \{a,b\}$.

3. En déduire une fonction `reconnait` : `expreg` → `char list` → `bool` qui détermine si une liste de caractères appartient au langage défini par une expression rationnelle donnée.
4. Appliquer cette fonction à la reconnaissance du mot aba par l'expression rationnelle $r = (a|b) * a$

8 Minimisation

8.1 Construction de l'automate minimal.

Objectif : maîtriser l'algorithme de minimisation. Reliser l'algo de minimisation dans le cours. Puis minimisez l'automates suivant :



8.2 Egalité entre automates.

On utilise la minimisation pour résoudre un problème de décidabilité. Montrer d'abord que les deux automates suivants, (état initial 0), reconnaissent le même langage.

δ	0	1	2	3
a	1	2	1	3
b	3	1	3	3

état terminal : 1

δ	0	1	2	3	4	5
a	1	2	3	2	2	5
b	5	4	5	3	4	5

terminaux : 1,3,4

A présent, proposer un algo qui permet de savoir si deux automates sont équivalent du point de vu du langage reconnu,

8.3 Construction de l'automate minimal à partir du langage.

Objectif : maîtriser le calcul direct de l'automate minimal. Relisez le cours. Si L étant un langage sur l'alphabet Σ, la relation Σ^*, notée $\sim_L$, est définie par la relation suivante :$x \sim_L y$ ssi $\forall z \in \Sigma^*, (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$ C'est une relation d'équivalence. Deux mots sont en relation pour la demi-congruence, si ils ont le même futur avec $\text{futur}_L(u)$ On contruit l'automate minimal a partir de $\sim_L$, les états sont les classes de $\sim_L$.On met une flèche de p vers q avec la lettre a si Classe(p).a est

inclus dans classe de q, L'etat initial = la classe de epsilon, Un état est final si il a epsilon dans son futur. On va donc devoir calculer ces classes.

Calcul des classe d'équivalence et construction de l'automate. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Pour chacun des langages L ci-dessous, déterminer les classes d'équivalencesde $\sim_L$. Dire si L est reconnaissable, et si oui, construire l'automate minimal le reconnaissant, à partir de ces classes.

Algorithme :

1. choisir d'abord des petits mots u, qui sont des prefixes de mots de L et qui ont donc un futur non vide
2. calculer le futur de u
3. calculer la classe de u qui est l'ensemble des mots qui ont le même futur ;

en les autres mots qui ne sont pas prefixe d'un mot de L ont tous le même futur : l'ensemble vide, et sont donc dans la même classe qui corresponds à un état poubelle dans l'automate minimal.

1. Σ^*
2. $\{a\}$
3. a^*b^*
4. $abba + ababa$
5. $\{a^n b^n, n \geq 0\}$
6. Optionnel : $\{uu | u \in A^*\}$

9 Le lemme de la pompe

Rappel de cours : La version simple du lemme de la pompe est la suivante : Si L est reconnaissable, alors il existe N tel que si $u \in L$ et $|u| \geq N$, alors il existe x, y, z tel que $u = xyz$ et $0 < |y| \leq N$ et $xy^*z \subset L$. En clair, des que le mot est assez long, je peux pomper quelquechose plus petit que N.

Version plus fine, du cours, consiste a dire que l'on peut pomper dans le debut du mot, on remplce la condition $0 < |y| \leq N$ par $0 < |y|$ et $|xy| \leq N$.

Non pompable (et donc non reconnaisable) : pour tout N, il existe un mot u dans le langage, de longeueur $\geq N$ tq pour toute decomposition $u = xyz$ avec $0 < |y|$ et $|xy| \leq N$, on a un k tel que $xy^kz \notin L$. On obtient ca en appliquant les regles des negations, c'est vu en cours. Il existe une version encore plus fine : je peux pomper dans tout facteur de longueur au moins N (pas seulement au début)

9.1 Non pompabilité

Montrez, en utilisant le lemme de la pompe que les langages suivants ne sont pas reconnaissables

- $\{a^n b^{2n} | n \geq 0\}$
- $\{(ab)^n c^n | n \geq 0\}$
- $\{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\}$
- $\{a^n b^m \mid m \geq n \geq 0\}$
- $\{a^n b^n | n \geq 0\} + \{a^p b^q | p \neq q[7]\}$
- optionnel $\{a^n b^m | n \neq m\}$

9.2 Pompabilité-optionnel

Montrez que le langage suivant est pompable mais pas reconnaissable : $\{b^m a^n b^n \mid m > 0, n \geq 0\} \cup a(a+b)^*$

10 Clôture langages réguliers.

En utilisant les propriétés de clôture des langages rationnels et le fait que $\{a^n b^n\}$ n'est pas rationnel, montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :

- $L1 = \{w \in (a+b)^* \,|\, |w|_a = |w|_b\}$
- $L2 = \{a^n b^p \,|\, n \neq p\}$
- $L3 = \{a^{2n} b^{2n} \,|\, n \geq 0\}$
- $L4 = \{a^n b^p | n \geq p\}$

Vous pourrez établirai une relation entre $\{a^n b^p | n \geq p\}$ et $\{a^n b^p | n > p\}$.

.

11 Grammaires hors contexte

11.1 De la grammaire vers le langage

Déterminer les langages engendrés par les grammaires suivante. Dire si la grammaires est ambiguës, justifier, Et si oui, donnez une version non non-ambiguë.

1. $S \to \epsilon \mid aaaS$
2. $S \to ab \mid aSb$
3. $S \to XY \mid Z$; $X \to Xa \mid a$; $Y \to aYb \mid \epsilon$; $Z \to aZb \mid W$; $W \to bW \mid b$
4. $S \to SS \mid \epsilon \mid (S)$
5. $S \to SS \mid \epsilon \mid (S) \mid [S]$
6. $S \to \epsilon \quad S \to a_i S a_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$ ou les lettres a_i représentent n terminaux, i.e. $\Sigma_T = \{a_1, \ldots a_n\}$
7. $S \to bS \mid aT$; $T \to aT \mid bU$; $U \to aV \mid bS$; $V \to aT \mid bU \mid \epsilon$

11.2 Du langage vers la grammaire

Trouver des grammaires qui génèrent les langages suivants.

1. L$\cup$ M, L.M L*, ou L et M sont deux langages reconnu par des grammaire d'axiome respectivement X et Y
2. $\{a^n b^p \mid 0 < p < n\}$
3. $\{a^n b^n c^m d^m \mid n, m \in \mathcal{N}\}$
4. $\{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathcal{N}\}$
5. $\{a^n b^m c^p \mid n = m \text{ ou } m = p\}$

6. optionnel $\{a^n b^m c^p d^q \mid n+q = m+p\}$ ce qui se génére facilement avec les techniques déjà vues.
7. optionnel $\{a^n b^m c^p d^q \mid n+p = m+q\}$

11.3 Désambiguiser à la main

Objectif : Se familiariser avec la grammaire qui génére les expressions arithmetiques pour les langages de programmations.

Soit F_1 la grammaire

$$E \to E + E \mid E - E \mid (E) \mid id$$

et G_1 la grammaire F_1 plus les règles :

$$E \to E * E \mid E/E \mid E \wedge E$$

1. Donner deux arbres de dérivations du mot $id - id - id$. Combien y en a-t-il ? Correpondent-ils à des interprétations équivalentes ?
2. Donner des grammaires F_2 et G_2 telles que $L(F_1) = L(F_2)$, que $L(G_1) = L(G_2)$, que chaque mot w possède une seule dérivation à partir du symbole initial de G_2, et que la décomposition en arbre corresponde au regles usuelles de priorité.

12 Grammaire et compilation.

Faut avoir parlé d'analyse lexicale en cours.

12.1 Analyse lexicale-optionnel

l'utilisation d'ocamllex n'est pas limitée a l'analyse lexicale des que l'on souhaite analyser un texte (chaîne, fichier, flux) sur la base d'expressions régulières, ocamllex est un outil de choix en particulier pour écrire des filtres, i.e. des programmes traduisant un langage dans un autre par des modifications locales et relativement simples.

Écrire un programme occamlex qui imprime un fichier en ayant préalablement enlevé toutes les lignes vides, et un autre qui compte les occurrences d'un mot dans un texte le mot et le nom du fichier texte sont passés en paramètres

12.2 Grammaire d'un Language de programmation

Considérons le petit programme suivant écrit en Pascal :

```
program calcul;
var
  T : array[1..10] of integer;
  S,I : integer;
begin
  S:=0; (* initialisation *)
  for I:= 1 to 10 do
  begin
    read(T[I]);
    S := S + T[I]
  end;
  writeln(S)
end.
```

L'analyseur lexical découpe ce programme en une liste des entités lexicales appelées "token" dont nous donnons ici le début :

program <0>	calcul <-1,50>	; <11>					
var <1>	T <-1,51>	: <12>	array <2>	[<13>	1 <-2,1>	.. <14>	10 <-2,10>

Chaque token est donné par une classe et sa valeur, s'il y en a une. Pour les identificateurs, la valeur sera la chaine de caractére, ou mieux, l'adresse d'entrée dans un tableau de chaine de caractères, qu'on appelle table des symboles en compilation.

Lorqu'elle rencontre des identificateurs, l'analyse lexicale les ranges dans la table des symboles. Aprés l'analyse lexicale, celui ci sera :

adresse	chaîne
0	program
1	var
2	array
3	of
4	integer
5	begin
6	for
7	to
8	do
9	end
⋮	⋮
50	calcul
51	T
52	S
53	I
54	read
55	writeln
⋮	⋮

La table est découpée en une zone pour les mots-clés, occupée ici de 0 à 9 et une zone pour les identificateurs à partir de 50. On suppose les différentes entités rangées dans l'ordre de leur apparition, sauf les mots-clés qui sont chargés préalablement dans la table. Les symboles ; : [], ., .. sont associés dans l'ordre à des tokens de classe 11 à 17 ; Comme il n'y a qu'une unité lexicale dans chacune de ces classes il n'est pas nécessaire de passer de valeurs.

On souhaite écrire un grammaire permettant de générer des programme Pascal, et en particuler notre programme. Plus précisément, la grammaire doit générer non pas le texte du programme mais le "mot" représentant la suite de token de ce programme. On commence par quelques questions pour déjà mieux comprendre c'est quoi ce "mot".

1. A quoi corresponds la classe d'un token pour cette grammaire ?
2. A quoi corresponds la classe -1, sur cet exemple ?
3. A quoi corresponds la classe -2, sur cet exemple ?

4. Que représente la valeur d'un token constante entiére, à quelle étape on la calcule, et comment la calculer ?
5. Proposer une grammaire permettant d'engendrer le langage auquel ce programme appartient. On conviendra qu'un non-terminal commence par une majuscule et que les terminaux qui sont aussi des chaines de caractères commencent par une minuscule.
6. Donner l'arbre de dérivation syntaxique associé à ce programme. Il couvre plusieurs pages, on pourra le finir chez soi. Indiquez les valeurs des tokens.
7. Lorsqu'on compile, on construit une version résumée de l'arbre d'analyse appelée "Arbre de Syntaxe Abstraite" (AST). Elle contient juste les informations utiles. Proposer un AST pour ce programme.

12.3 Nettoyage de grammaires

On veut nettoyer une grammaire, en enlevant :
(1) Les non-terminaux non-productifs, qui ne produisent pas de mots sur A^*
(2) les non-terminaux non ateignables, qui ne figurent dans aucune dérivation faite à partir de S.
Donner un algorithme permettant de repérer (et donc d'éliminer) les non-productifs, puis un autre algorithme permettant de repérer (et donc d'éliminer) les non atteignables
Quand on veut faire un nettoyage complet, l'ordre dans lequel on effectue ces deux opérations est-il indifférent ? Pourquoi ? Nettoyer la grammaire :
$S \to X \quad X \to Y \quad Z \to W|eS$
$W \to b|fX \quad Y \to aT|TK$
$U \to bdX|Y|dZ \quad K \to cV|Z$
$X \to abcY \quad W \to U$
$T \to aT|\epsilon|ef|aY \quad V \to af$

13 Optionnel grammaire

13.1 Désambiguïsation difficile.

Soient D_1, D_2 et D_3 les langages suivants :

$$D_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$$

$$D_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b \text{ et}$$

$$\forall v \text{ préfix de } w \ \ |v|_a \geq |v|_b\}$$

$$D_3 = \{w^R \in \{a,b\}^* \mid w \in D_2\}$$

On veut donner une grammaire pour D_1 non ambigue. Montrer comment obtenir D_1 avec les opérations de concaténation et d'étoile à partir du langage D_2 (Dyck d'ordre 1) et de son miroir D_3. Utiliser cette description et les résultats de clôture pour lui trouver une grammaire non-ambiguë.

13.2 Grammaires contextuelles

On considère l'ensemble de règles de réécriture suivant :
$S \to aTc \quad aT \to aaTcT \quad cT \to Tc \quad aT \to ab \quad bT \to bb$
Quel est l'ensemble des mots sur $\{a,b,c\}^*$ dérivables à partir de S ?

14 Automates à pile

Construire un automate à pile si possible détérministe, pour les langages suivants. On précisera à chaque fois son mode de reconnaissance (par état final, par pile vide, ou par les deux).

1. $L_1 = \{a^n b^n | n \geq 1\}$, puis $L_2 = \{a^n b^n | n \geq 0\}$.
2. $L_3 = \{a^p b^n c^q | p \geq 0, q \geq 1, n = p + q\}$.
3. L_4 = mots de Dyck sur 1 puis sur 2 types de parenthésés.
4. L_5 = mots avec des a et des b qui ont autant de a que de b. On donnera deux solutions : la premiere n'utilise qu'un état, la seconde qu'un seul symbole de pile.
5. L_6 = les palindromes.
6. $L_7 = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$
7. $L_8 = \{a^n b^m a^n b^m | n, m \geq 0\}$.

15 Est il Algébrique ?

Les langages suivants sont-ils algébriques ? On utilisera les quatre méthodes possibles pour répondre à cette question : On montre qu'un langage est algébrique, en 1- le générant par une grammaire hors contexte ou 2-le reconnaissant par un automate à pile. On montre par l'absurde qu'un langage n'est pas algébrique avec 3- les propriétés de clôtures 4- La contraposée du lemme de la pompe algébrique. Les exercices optionnels utilisent le fait que l'image ou l'image inverse d'un langage algébrique, par un morphisme, reste algébrique.

1. $\{a^n b^m \mid m \neq n \text{ et } m \neq 2n\}$
2. $L_2 = \{a^n b^m a^n b^m \mid n, m \in \mathcal{N}\}$
3. $\{a^{n^2} \mid n \in \mathcal{N}\}$
4. $\{u \mid \ |u|_a = |u|_b = |u|_c\}$
5. $\{uu \mid u \in A^*\}$
6. optionnel Le complémentaire du précédent.
7. optionnel $\{u \mid \ |u|_a + 3|u|_b = 2|u|_c\}$
8. optionnel $\{u \mid \ |u|_a = 3|u|_b = 2|u|_c\}$
9. optionnel $\{a^n b^n a^n b^n | n \geq 0\}$
10. optionnel $\{a^p b^q c^r | p \leq q \leq r\}$
11. optionnel $\{f(y) \mid y \in Y\}$ où Y est algébrique et ù $f(a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 ...) = a_1\, a_3\, a_5 \ldots$ (f efface les lettres qui sont à une position paire)
12. optionnel $\{a^p b^q c^r d^s e^t f^u | (p,q,r,s,t,u)$ croit ou décroit $\}$

16 Analyse Syntaxique.

16.1 Analyse ascendante à la main.

Le cours d'analyse syntaxique ascendante sera fait la semaine prochaine. Néanmoins, ce TD introduit gentiment un exemple concret sur ce thème. De cette façon, les notions du cours, plus abstraites, seront plus digestes. Soit la grammaire suivante :

E	$::= E + T$	E	$::= T$
T	$::= T * F$	T	$::= F$
F	$::= id$	F	$::= cte$

1. Que reconnait t'elle ? est elle ambigue ?
2. Utiliser la grammaire pour générer la chaîne *id*id+cte* par une dérivation droite.
3. On considére un formalisme étendu d'automate à pile qui permet de dépiler un nombre arbitraire de symboles de la pile. Cela change t'il la puissance du modèle ?
4. Écrivez l'automate à pile suivant, pour cette grammaire : Il utilise un seul état et deux sortes de transitions : 1- pour chaque régle $X \rightarrow \alpha$, une transition appelée "reduction" qui ne lit pas le mot (epsilon transition), qui dépile α et empile X. 2- pour chaque terminal a une transition appellée "lecture" ou "shift" (traduc anglais) qui lit a et empile a.
5. L'automate de la question précédente permet de reconnaître le langage associé à la grammaire, avec une analyse "ascendante", i.e en remontant des feuilles vers la racine. Reconnaître la chaîne *id*id+cte*. On mettra la colonne de l'état de pile à gauche de celle de l'état du mots.
6. Cet automate n'est pas déterministe, préciser pourquoi :
7. Est ce que c'est gènant ?
8. Ben KesKiFautfaire alors ?
9. Un peu d'introspection, vous-même, quelle stratégie avez vous suivi pour orienter vos choix, lorsque vous avez utilisé l'automate à la main.
10. L'analyse LR(1) autorise un automate a pile à consulter quelle est la prochaine lettre du mot à lire, sans pour autant la "consommer". Mais alors, quelle sera cette lettre, lorsqu'on sera arrivé au bout du mot ?

16.2 Calcul premiers et suivants

Soit la grammaire :

S	$::= AaB$		
A	$::= CB$	A	$::= CBb$
A	$::= \epsilon$	A	$::= CAd$
B	$::= b$		
C	$::= c$	C	$::= \epsilon$

1. Pour chaque non terminal X calculer premier(X). Commencer par écrire les équations et pour cela regarder les règles ou X apparaît dans le membre GAUCHE.
2. Pour chaque non terminal X calculer suivant(X). Commencer par écrire les équations et pour cela regarder les règles ou X apparaît dans le membre DROIT.

16.3 Exemple simple d'automate SLR(1), et son exécution.

Soient les grammaires :

S	::=	L	
L	::=	L ;A	| A
A	::=	a	

S	::=	L	
L	::=	A ;L	| A
A	::=	a	

S	::=	L	
L	::=	L ;L	| A
A	::=	a	

1. Montrer que ces grammaires engendrent le même langage.
2. Pour chaque grammaire si elle est LR(0), si nécessaire construire l'automate d'item et identifiez les conflits, puis essayer de les résoudre en utilisant l'automate SLR(1).
3. Faire tourner l'automate et comparer la taille de la pile lors de l'analyse ascendante du mot $a; a; a$ par les deux premières grammaires. Quelle remarque peut-on faire ?
4. Pour les deux premières grammaires, montrez que le langage reconnu par l'automate LR(0) est le langage des mots de pile.

16.4 Analyse syntaxique des expressions arithmétiques ;

Soit la grammaire des expressions arithmétiques déjà vue en cours :

E	::=	E+T —T,
T	::=	T *F —F
F	::=	Id — Cte

Construire L'automate LR(0) puis l'automate SLR(1) si nécessaire.

16.5 Autre example d'analyseur LR

S	::=	E ♯
E	::=	`id`
E	::=	`id`(E)
E	::=	E + `id`

Construisez l'automate LR(0) permettant de faire l'analyse ascendante. Cet automate présente un conflit, indiquer l'état ou il se trouve, et entre quoi et quoi il y a conflit Expliquer comment résoudre ce conflit.

16.6 Les cas LR(1) et LALR(1)

Soit la grammaire suivante :

S	:= X#	X	:= dc
X	:= Ma	X	:= bda
X	:= bMc	M	:= d

Cette grammaire est elle LR(O), SLR(1), LALR(1) ?

16.7 Optionel, cause echec SLR(1) ?

On se donne un langage de types permettant de décrire le type des entiers ou celui de fonctions à valeur entière, prenant en argument des entiers ou d'autres fonctions de même nature.
Un type est donc soit la constante `int` soit de la forme $\tau_1 * \ldots * \tau_n \rightarrow$ `int` avec τ_i des types. Pour reconnaître ce langage de types, on se donne la grammaire suivante avec comme ensemble de terminaux $\{\sharp, \rightarrow, *,$ `int`$\}$ et comme ensemble de non-terminaux $\{S, A, T\}$ avec S l'axiome :

S	:= T $\sharp$
T	:= `int`
T	:= A $\rightarrow$`int`
A	:= T
A	:= T * A

1. Calculer les suivants de T et de A.
2. Construire la table d'analyse SLR(1) de cette grammaire en indiquant en cas de conflit les différentes actions possibles. Cette grammaire est-elle SLR(1) ?
3. Expliquer la nature du conflit obtenu en donnant un exemple d'entrée où ce conflit se produit. La grammaire donnée est-elle ambiguë ?
4. Que suggérez-vous pour remédier à ce problème ?

17 Machine de Turing

Proposer une Machine de Turing pour les différentes tâches suivantes. On expliquera le fonctionnement de chaque machine avec trois colonnes d'un tableau pour représenter :

— les configurations intermédiaires de la machine qui jalonnent l'éxecution, (ruban + tête de lecture + état
— les étapes d'un algorithmes, chaque étape étant réalisé par un groupe d'états à nommer,
— l'automate de la machine qui utilise les états mentionnés dans les autres colonnes.

Lorsqu'il y a une boucle, on s'atachera à identifier précisément l'état ou on reconnait que l'on sort de la boucle ; lorsque un état est réutilisé, on indiquera le contenu du ruban avant et aprés la transition qui permet de changer d'état.

— Ajouter un 1 à droite d'une séquence de 1
— Ajouter 1 à un nombre écrit en binaire.
— Dupliquer le mot en entrée
— Reconnaître le language $\{ww, w \in \{0,1\}^*\}$.
— Reconnaître le langage $\{a^{2^n}/n \in \mathbb{N}\}$

18 Decidabilité

18.1 Ecrire une certaine lettre.

Un classique : Est il décidable de savoir si une machine de turing va écire une certaine lettre

18.2 Decidabilité problème du mot

Soit H une grammaire et $u = u_1\, u_2 \ldots u_{|u|}$ un mot. On voudrait savoir si le mot u est dans le langage engendré par H. Pour cela, on met d'abord H sous forme normale de Chomsky, Rappel : les règles sont de la forme $M \rightarrow \epsilon; X \rightarrow YZ; X \rightarrow x$; l'axiome n'est pas en membre droit, et seul l'axiome génére epsilon. Puis on remplit un tableau T de type `array[0..|u|,0..|u|] of subset de NT` (où NT est l'ensemble des non terminaux de H) avec M dans $T[i,j]$ pour $j \geq i$ ssi $M \rightarrow^* u_i\, u_{i+2} \ldots u_j$. ($T[i,j]$ pour $j < i$ est sans signification). Comment calculer les valeurs de ce tableau ? Comment déduire de ce tableau le fait que u est dans le langage ou non ? Quelle est la complexité de cet algorithme ?
On considérera l'exemple ou la grammaire est $S \rightarrow \epsilon; S \rightarrow aSb$ qui génére $\{a^n, b^n\}$ On souhaite montrer que *aabb* est dans le langage, on indexe les lettre $a_1 a_2 b_3 b_4$ et on réécrit dans chaque case le sous mot associé a la case.

18.3 Semi-décidabilité

1. soit une MT M, Montrez que le langage des mots pour lesquels la machine s'arrête est semi décidable.
2. Demontrer que un langage est décidable ssi lui et son complémentaire sont reconnaissable.

18.4 Difficulté de prédire l'arrêt

Ce programme calcule la suite de Syracuse :

```
\\ x est un Entier >0
while (x != 1) do
  if x mod 2 == 0
  then x<-x/2
  else x<-3x + 1
```

Faites tourner le programme avec 7 comme valeur initiale de x. Ce programme s'arrete t'il pour n'importe quelle entrée strictement positive ?

18.5 Indecidabilité problème de Post

Définition problème de Post : Les données du problème sont deux listes finies $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N$ de mots d'un alphabet A ayant au moins deux symboles. Une solution du problème est une suite d'indices $(i_k)_{1 \leq k \leq K}$ avec $K \geq 1$ et $1 \leq i_k \leq N$ pour tous les k, telle que les concaténations $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_K} et \beta_{i_1} \ldots \beta_{i_K}$ soient égales. Le problème de correspondance de Post (PCP) consiste à déterminer si une solution existe ou non. Résoudre les trois problèmes de post suivants, ou on donne la suite des paires (α_i, β_i).

- (a,baa) , (ab,aa) ,(bba,bb)
- (bb,b),(ab,ba),(c,bc)
- (#, #p000#), (0, 0), (1, 1), (#, #), (p0, 0p), (p#, q#), (0q, 1p), (1q, q0), (# q), (#,f) (# f0, #f),(# f1, #f), (#f#, #). Sur ce dernier problème de Post, on impose de plus de commencer par la première paire (#, #p000#). On peut montrer que les problèmes de Post ainsi contraints sont équivalents aux problèmes de Post en général (on peut encoder les un par les autre).

18.6 Indecidabilité de l'ambiguïté

A un problème de Post $(u_i, v_i) i \in \{1, \ldots N\}$ sur l'alphabet A = a, ..., z , associons les grammaires suivantes :

```
S2-> $ | #S2 | T
T->T# | U
U->aS2 a | ... | zS2z

S1 ->u1 # S1 # miroir(v1 )
   ->u2 # S1 # miroir(v2 )
....

  -> uN # S1 # miroir(vN )

  ->  u1 # $ # miroir(v1 )
  ->  u2 # $ # miroir(v2 )
 ...
 -> uN # $ # miroir(vN )

S -> S1 | S2
```

- Que génére la grammaire S2
- Que génére la grammaire S1
- A quelle condition la grammaire avec l'axiome S est elle ambigue
- Donner un exemple de grammaire ambiguë en utilisant les système de post donnés en exemple.
- En déduire que le problème de savoir si une grammaire est ambiguë est indécidable .

18.7 Indécidabilité de l'intersection.

Considérons le problème suivant : soit G_1, G_2 deux grammaires, peut on décider si l'intersection des langages qu'elles génére est non vide ?

19 Corrigés exo optionnels

19.1 égalité entre deux langages

$(L^*.M)^* = \{\epsilon\} + (L+M)^*.M$ On utilise donc la double inclusion comme cela a déjà était fait en cours et en TD.

Dans le sens $(L^*.M)^* \subseteq \{\epsilon\} + (L+M)^*.M$

Si $w = \epsilon$, trivial. Si $w \neq \epsilon$, alors $w \in (L^*.M)^n$ $(n > 0)$, donc il peut s'écrire comme $k_1 \ldots . k_n$ avec $k_i \in (L^*.M)$. On écrit chaque k_i comme $l_i.m_i$ avec $l_i \in L^*$ and $m_i \in M$. On a $l_i \in L^* \subseteq (L+M)^*$ et $m_i \in (L+M)^*$, donc $u = l_1.m_1 \ldots . l_{n-1}.m_{n-1}.l_n \subseteq (L+M)^* \ldots . (L+M)^* \subseteq (L+M)^*$ et donc $w = u.m_n \in (L+M)^*.M$.

Dans l'autre sens $\{\epsilon\} + (L+M)^*.M \subseteq (L^*.M)^*$

Si $w = \epsilon$, alors $w \in (L^*.M)^*$. Si $w \neq \epsilon$, $w = v.m$ avec $v \in (L+M)^*$ et $m \in M$. On peut écrire v comme $k_1 \ldots . k_n$ avec $k_i \in (L+M)$. On démontre par récurrence sur n que $v.m \in (L^*.M)^*$. Si $n = 0$, trivial. Suppose vrai jusque $n-1$. Si pour tout h, v_h est dans L, alors trivial, sinon soit g le plus petit indice tel que v_g est dans M. On applique l'hypothèse de récurrence à $k_{g+1} ... k_n.m$ et on dit que $k_1 ... k_g \in L^*M$

19.2 Expression rationnelle

1. $L_7 = \{w \mid w$ ne contient pas deux occurrences successives de la lettre $a\}$ Correction : $(\epsilon + b + a.b)^*.(\epsilon + a)$
2. $L_8 = \{w \mid w$ ne contient pas trois occurrences successives de la lettre $a\}$ Correction : $(\epsilon + b + a.b + a.a.b)^*.(\epsilon + a + a.a)$
3. $L_9 = \{w \mid$ le nombre de a dans w est pair $\} = \{w \mid |w|_a = 0 \ (mod\ 2)\}$ Correction : $(b^*.a.b^*.a.b^*)^* + b^*$
4. $L_{10} = \{w \mid |w|_a = 1 \ (mod\ 3)\}$ Correction : $(b^*.a.b^*).(a.b^*.a.b^*.a.b^*)^*$

19.3 Automate reconnaissant un langage donné.

- Nombre pair de facteur u :faire deux occurences de l'automate cherchant le facteur u. Dans la premiere version, j'ai lu le facteur un nombre pair de fois (sauf à l'extremité de l'automate ou je viens de lire une occurence de plus), dans la deuxieme impair. Quand j'ai reussi a lire un u de plus, la parite change, on se dirige donc vers l'autre automate. Donc pour chacune de deux versions, remplacer la flèche qui conduit à l'état le plus à droite, par une flèche qui passe sur l'autre version, dans l'état ou on a deja lu v, v etant le plus long préfixe de u qui est aussi suffixe de u, avec v different de u.
  Pour $u = bab$, ca fait six etats (1, a, 1) (1, b, 2) (2, b, 2) (2, a, 3) (3, a, 1) (3, b, 2') (1', a, 1') (1', b, 2') (2', b, 2') (2', a, 3') (3', a, 1') (3', b, 2). Initial 1, finals 1 2 et 3
- multiples de trois : difficile, surtout l'expression. il faut commencer par l'automate. Il y a 3 états numérotés 0,1,2. On est dans l'état i quand a lu un nombre qui vaut i modulo 3. Pas besoin de faire un cas spécial pour epsilon, son reste modulo 3 est 0. Si je suis dans l'etat i mod 3 et que la prochaine lettre est j, je vais en $(2i+j)$[3] (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 2), (2, 0, 1), (2, 1, 2). L'état final est 1. L'état initial est 0. Pour l'expression, On utlise Arden : $(0 + 1(01^*0)^*1)^*$

19.4 Resolution d'équations

L'exemple optionel correspond à $\{w \in \mathcal{A}^* \mid w$ contient exactement une occurrence de la chaîne $bb\}$. Son expression rationnelle est : $a^*b(a^+b)^*b(a^*b)^*a^*$.
Ou encore $(a^* + a^*ba)^*bb(aba^* + a)^*$.
Ou encore $(ba + a)^*bb(ab + a)^*$.

19.5 Construction d'automates

Automate reconnaissant l'ensemble des mots obtenus en effaçant un nombre pair de lettres d'un mot de L : Correction : On fait le produit synchronisé avec l'automate reconnaissant un nombre pair de lettres, qui a seulement deux états 0, et 1, ou l'état 0 reconnait les mots de longeur paire. On enléve toutes les lettres des transitions ; on rajoute les transition (q,0) $-a->$ (q',0)) et (q,1) $-a->$ (q',1)) si q, $-a->$ q' etait une transition de l'automate reconnaissant L. On obtient un automate non déterministe, on peut choisir à tout instant d' aller se balader dans les état (*,1) quand on reviendra dans les (*,0), on aura effacé deux lettres. Les états final sont donc (q,O) ou q est final.

19.6 Le barman aveugle

question 1 : Il y a 4 configurations possibles :
- T : les verres Tous retournés dans le meme sens
- U : Un verre retourné dans un sens, et les 3 autres dans l'autre
- D : 2 verres en Diagonale dans un sens et les 2 autres dans l'autre
- C : 2 verres a Coté l'un de l'autre dans un sens et les 2 autres dans l'autre

3 coups possibles (on laisse "tout retourner" et "rien retourner" qui ne font rien)
- u : retourner un verre (revient au meme qu'en retourner trois)
- d : retourner deux verres en diagonale
- c : retourner deux verres cote à cote

Etats initiaux : tous (au choix du client) Les transitions :

	u	d	c
T	U	D	C
U	T,D,C	U	U
D	U	T	C
C	U	C	T,D

question 2 : Il suffit de jouer "cd". 'c' oblige le barman à passer dans D, puis 'd', fait gagner le client.

question 3 : Le client gagne si il fait se balader dans l'automate ci-dessus sans passer par l'état T. Donc l'automate en question est celui-ci dessus dans lequel on enleve l'etat T, et où tous les états sont finaux

question 4 : Il faut reconnaître le complémentaire. Donc on déterminise l'automate ci-dessus. Attention : l'état initial sera la réunion des trois états U,C,D. On voit que l'on peut progressivement réduire l'incertitude, c'est a-dire que nos états vont être des ensembles d'états de plus en plus petits. Le non-deterministe avait tous ses états finaux, le déterminisé a donc aussi tous ses états finaux. On rajoute la poubelle, seul états non-final. Puis on intervertit les finals et non-finals, pour trouver le complémentaire. La poubelle se retrouve donc seul état final. On trouve une séquence gagnante (un mot reconnu) qui est dcdudcd. Youpi !

19.7 Minimisation

Calcul des classe d'équivalence de la demi congruences pour le langage $\{uu|u \in A^*\}$. Toutes les classes sont des singletons. Si $u \neq v$, alors il y a un mot w tq uw est carre ouexclusif vw carre : si $|u| = |v|$, prendre u, si $|u|$ pair et $|v|$ impair, idem. Si $|u| > |v|$ meme parite, considerez $\{x| |x| = |u|, ux$ carre$\}$ et $\{x| |x| = |u|, vx$ carre$\}$. Le premier est un singleton, le second contient $2^{|u|-|v|}$ mots. donc y a un w dans le second qu'est pas dans

19.8 Le lemme de la pompe

Non Pompabilité Le langage $\{a^n b^m | n \neq m\}$ n'est pas pompable. soit N quelconque, je choisi $u = a^N b^{N+N!}$,soit une décomposition quelonque $u = xyz$, $|y| > 0$, $|xy| <= N$, on a y tombe dans les a, $y = a^k$,et $a^{N-k}(a^k)^{(1+N!/k)}b^{N+N!}$ sort du langage, par ce que quand on regroupe les a, on se rends compte que l'exposant vaut celui de b.

Pompabilité Le langage suivant est pompable mais pas reconnaissable : $\{b^m a^n b^n \mid m > 0,\ n \geq 0\} \cup a(a + b)^*$. Soit $N = 2$, soit u un mot quelconque de longeuer au moins 2, s'il est dans $a(a + b)^*$, je peux pomper la deuxieme lettre, s'il est en $b^{\geq 2}a^n b^n$, je peux pomper le premier b, je reste dans $\{b^m a^n b^n\}$, s'il est en $ba^n b^n$, je peux pomper aussi le premier b, puissance 0, je suis dans $a(a + b)^*$, puissance 2 et plus, je suis dans $\{b^m a^n b^n\}$. S'il était reconnaissable, alors son intersection avec le reconnaissable $b(a + b)^*$ le serait aussi, mais c'est $\{ba^N b^N\}$ qui lui n'est pas pompable

19.9 Grammaires hors contexte

Grammaires pour les langages suivants. $\{a^n b^m c^p d^q \mid n + q = m + p\}$

Correction : $L7 = \{(a^n b^n)b^m(c^p d^p)d^m\} + \{a^n(a^m b^m)c^n(c^p d^p)|m > 0\}$ (on décompose suivant plus de a que b ou contraire) d'ou grammaire non ambiguë

$L8 = \{a^n b^m c^p d^q \mid n + p = m + q\} : S-> aSd|T|U;$

Correction : $T-> ...a^x b^{x+y} c^y; U-> b^x c^{x+y} d^y, y > 0$, (ambigu si je met pas le $y > 0$, cas ou autant de a que de d) Donc pour $L8$ on décompose suivant plus de a que de b. (faire un dessin ou monte de 1 avec un a ou c, descent de avec b ou d) $L8 = a^n(a^p b^p)(c^m d^m)d^n + (a^n b^n)(b^m c^m)(c^p d^p)$ ambigu, on enlève l'ambiguïté en forçant $m > 0$ dans le second par exemple.

19.10 Désambiguation difficile.

Correction : La solution suivante est simple mais ambigue. $D1-> aD1b|bD1a|D1D1|epsilon$ ambigu $D1-> aD1bD1|bD1aD1|epsilon$ ambigu, cf abab. Faire des graphes, monte de 1 sur un a, descend sur un b. $D1$ = part de 0, finit en 0, $D2$ = part de 0, finit en 0, reste au dessus de 0, $D3$ = part de 0, finit en 0, reste au dessous de 0. $D1 = (D2 + D3)^*$ On décompose un mot de $D1$ en une suite de mots, non nulls, en coupant a chaque fois que ca croise 0. On génère de facon non ambiguë un mot de $(D2 + D3)^*$ Un mot de $D2$ non vide s'écrit $aD2b$, ou $D2$ est l'axiome du langage $D2$. On a aussi que un mot de $D2$ non vide se décompose comme un mot de $D2$ non vide, suivit par un mot de $D2$. un mot de D3 est soit un mot vide, soit un mot non vide : $D1-> aD2bD1|bD3aD1|epsilon; D2-> aD2bD2|epsilon; D3-> bD3aD3|epsilon$

19.11 Grammaires contextuelles

Cette grammaire a été vue en cours, ca génére $a^n b^n b^n$.

19.12 Est il algébrique difficile

Le complémentaire de $\{uu \mid u \in A^*\}$ est algébrique. En effet, m n'est pas un carre ssi il est de longueur impaire, ou il s'ecrit uv avec u et v de meme longueur mais differents. On se ramene facilement aux uv. Dire que u et v ont meme longueur mais sont differents signifie qu'il existe deux lettres $a <> b$ et des mots x, y, w, t tq $|x| = |y|, |w| = |t|$ $u = xaw$ et $v = ybt$, ce qui revient a dire que m peut s'ecrire $xawybt$.

La, grosse ruse, un mot s'ecrit wy avec $|x| = |y|, |w| = |t|$ ssi il est de longeur $|t| + |y|$ ssi il est de longeur $|y| + |t|$ ssi il s'ecrit $y'w'$ avec $|x| = |y'|, |w'| = |t|$

ce qui fait qu'un mot pair n'est pas un carre ssi il s'ecrit $xay'w'bt$ avec a et b differents, x et y de meme longueur, w et t de meme longueur, ce qui revient a dire qu'il est genere pas la grammaire

$S_a -> \alpha S_a \beta$ pour toutes lettres a, α β

$S_a -> a$ pour toute lettre a

$S -> S_a S_b$ pour toutes lettres a et b avec $a \neq b$

Bien sur, la grammaire est ambigu, il y a autant de facon d'avoir uv avec $|u| = |v|$ qu'il y a de i tq la ieme lettre de u est differente de la ieme de v.

Le langage $\{u \mid |u|_a + 3|u|_b = 2|u|_c\}$ est Algebrique , faire automate pile. Morale : sur a, j'empile U sur b j'empile UUU sur C je dépile UU

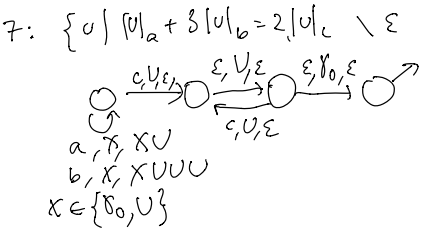


FIGURE 1 – Corrigé 7

Le langage $\{u \mid |u|_a = 3|u|_b = 2|u|_c\}$ n'est pas algèbrique Intersection avec $a * b * c*$ (ca donne $a^{6n}b^{2n}c^{3n}$) puis image inverse via le morphisme f défini par $f(a) = aaaaaa, f(b) = bb, f(c) = ccc$.

Le langage $\{a^n b^n a^n b^n | n \geq 0\}$ n'est pas algébrique , on se ramene a un connu. Malgre son air de anbmanbm, c'est a anbncn qu'on se ramene. image inverse de $h(a) = h(c) = a$, $h(b) = h(d) = b$, puis intersection avec $a^*b^*c^*d^*$, puis morphisme efface d

Le lagnage $\{a^p b^q c^r | p \leq q \leq r\}$ n'est pas algébrique , pompage. prendre $a^N b^N c^N$. Etude des decompositions. On pompe en paralléle x et y.

1er cas : x ou y est "a cheval" sur deux paquets. $k = 2$ et on n'est plus dans $a^*b^*c^*$.

2eme cas : x ou y est nul, si le non nul est dans les a ou les b, faire $k = 2$, dans les c, faire $k = 0$.

3eme cas, x dans les a, y dans les b : $k = 2$

4eme cas, x dans les b, y dans les c : $k = 0$

Le langage $\{f(y) \mid y \in Y\}$ où Y est algébrique et ù $f(a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 ...) = a_1\, a_3\, a_5 ...$ (f efface les lettres qui sont à une position paire) est algèbrique. on considére le morphisme définit par $h(a) = h(\bar{a}) = a, h(b) = h(\bar{b}) = b$ $g(a) = a, g(b) = b, g(\bar{b}) = g(\bar{a}) = epsilon$ $f(X) = g(h^{-1}(X) \cap ((a+b)(\bar{a}+\bar{a}))^*(a+b+epsilon))$.

Le langage $\{a^p b^q c^r d^s e^t f^u | (p, q, r, s, t, u)$ croit ou décroit $\}$ n'est pas algèbrique. Pompage, il faut prendre le mot $a^N b^N c^N d^{N+1} e^{N+1} f^{N+1}$. Je vous laisse faire l'etude des cas. Remarque : si on ne met que 4 lettres, c'est pompable ! Avec 5 lettre, non pompable, mais il faut jouer sur le fait que $|xuy| \leq N$. Prendre $a^N b^{3N} c^{3N+1} d^{3N+1} e^{3N+1}$.

19.13 Analyse lexicale

Il ya juste deux petit programme ocamllex a faire

```
rule scan = parse
| '\n'+ { print string "\n"; scan lexbuf }
| _ as c { print char c; scan lexbuf }
| eof  { () }
{ let () = scan (Lexing.from_channel stdin)}


{let word = Sys.argv.(1)
let count = ref 0}

rule scan = parse
| ['a'-'z' 'A'-'Z']+ as w {
   if word = w then incr count;
   scan lexbuf }
| _ { scan lexbuf }
| eof
{ () }
{
let () = scan (Lexing.from_channel
    (open in Sys.argv.(2)))
let () = Printf.printf "%d occurrence(s)\n"
 !count }
```

19.14 Analyse pas SLR(1).

Suivants de T et de A.

$$\begin{array}{ll} \text{SUIV}(T) & = \text{SUIV}(A) \cup \{\sharp, *\} \quad = \{\rightarrow, \sharp, *\} \\ \text{SUIV}(A) & = \{\rightarrow\} \end{array}$$

Les états de l'automate LR(0) sont

s_1 : $S \to .T\sharp$, $T \to .\texttt{int}$, $T \to .A \to \texttt{int}$, $A \to .T$, $A \to .T * A$

s_2 : $T \to \texttt{int}.$

s_3 : $S \to T.\sharp$, $A \to T.$, $A \to T. * A$

s_4 : $T \to A. \to \texttt{int}$

s_5 : $A \to T * .A$, $T \to .\texttt{int}$, $T \to .A \to \texttt{int}$, $A \to .T$, $A \to .T * A$

s_6 : $T \to A \to .\texttt{int}$

s_7 : $A \to T.$, $A \to T. * A$

s_8 : $A \to T * A.$, $T \to A. \to \texttt{int}$

s_9 : $T \to A \to \texttt{int}.$

La table de transitions est :

	int	→	*	♯	T	A
s_1	shift s_2				goto s_3	goto s_4
s_2		. . . reduce $T ::=$ int . . .				
s_3		reduce $A ::= T$	shift s_5	succes		
s_4		shift s_6				
s_5	shift s_2				goto s_7	goto s_8
s_6	shift s_9					
s_7		reduce $A ::= T$	shift s_5			
s_8		shift s_6 reduce $A ::= T * A$				
s_9		. . . reduce $T ::= A \to$ int . . .				

La grammaire n'est pas SLR(1) (état s_8) avec le symbole d'avance →. Le conflit est un conflit shift/reduce dans une situation de la forme $T * A. \to \texttt{int}$ on ne sait pas s'il faut réduire pour obtenir $A \to \texttt{int}$ ou au contraire lire $T * A \to .\texttt{int}$ ce qui amènera ensuite à réduire $A \to \texttt{int}$ en T. Le problème se pose dans le cas du type

$$\texttt{int} * \texttt{int} \to \texttt{int} \to \texttt{int}$$

qui a deux interprétations possibles : une fonction à un argument fonctionnel de type $\texttt{int} * \texttt{int} \to \texttt{int}$ ou bien une fonction à deux arguments l'un de type int et l'autre de type $\texttt{int} \to \texttt{int}$. Cet exemple montre que la grammaire est ambiguë.

NB avec le type

$$\texttt{int} * \texttt{int} \to \texttt{int}$$

on arrive aussi à l'état ou il y a conflit. Il n'y a pas de conventions qui s'impose, le mieux est probablement de forcer un parenthésage du type des arguments lorsqu'ils sont fonctionnels.