Langages Formels 2018-2019
Corrigé des exos optionels
Frédéric Gruau

1 Démonstration d'égalité entre deux langages

$(L^*.M)^* = \{\epsilon\} + (L+M)^*.M$ On utilise donc la double inclusion comme cela a déjà était fait en cours et en TD.

Dans le sens $(L^*.M)^* \subseteq \{\epsilon\} + (L+M)^*.M$

Si $w = \epsilon$, alors $w \in \Lambda$. Si $w \neq \epsilon$, alors $w \in (L^*.M)^n$ $(n > 0)$, donc il peut s'écrire comme $k_1 \ldots k_n$ avec $k_i \in (L^*.M)$. On écrit chaque k_i comme $l_i.m_i$ avec $l_i \in L^*$ and $m_i \in M$. On a $l_i \in L^* \subseteq (L+M)^*$ et $m_i \in (L+M)^*$, donc $u = l_1.m_1. \ldots .l_{n-1}.m_{n-1}.l_n \subseteq (L+M)^*. \ldots .(L+M)^* \subseteq (L+M)^*$ et donc $w = u.m_n \in (L+M)^*.M$.

Dans l'autre sens $\{\epsilon\} + (L+M)^*.M \subseteq (L^*.M)^*$

Si $w = \epsilon$, alors $w \in (L^*.M)^*$. Si $w \neq \epsilon$, $w = v.m$ avec $v \in (L+M)^*$ et $m \in M$. On peut écrire v comme $k_1. \ldots .k_n$ avec $k_i \in (L+M)$. On démontre par récurrence sur n que $v.m \in (L^*.M)^*$. Si $n = 0$, fastoche. Suppose vrai jusque $n-1$. Si pour tout h, v_h est dans L, alors fastoche, sinon soit g le plus petit indice tel que v_g est dans M. On applique HR a $k_{g+1} \ldots k_n.m$ et on dit que $k_1 \ldots k_g \in L^*M$

2 Expression rationnelle

2.1 optionnel: ExprRat compliqué.

1. $L_7 = \{w \mid w$ ne contient pas deux occurrences successives de la lettre $a\}$
   - $(\epsilon + b + a.b)^*.(\epsilon + a)$
2. $L_8 = \{w \mid w$ ne contient pas trois occurrences successives de la lettre $a\}$
   - $(\epsilon + b + a.b + a.a.b)^*.(\epsilon + a + a.a)$
3. $L_9 = \{w \mid$ le nombre de a dans w est pair $\} = \{w \mid |w|_a = 0 \ (mod\ 2)\}$
   - $(b^*.a.b^*.a.b^*)^*$
4. $L_{10} = \{w \mid |w|_a = 1 \ (mod\ 3)\}$
   - $(b^*.a.b^*).(a.b^*.a.b^*.a.b^*)^*$