Langages Formels 2019-2020
TDs + devoir + TP
Frédéric Gruau

Plan

Le cours est divisé en six périodes de deux semaines, avec l'enchainement des six thèmes suivants : a-Rappels, b-approfondissement automates, c- Grammaires Hors Contexte, d-Automates à piles, e- analyse syntaxique ascendantes, f- Machine de Turing. L'enchaînement est une construction logique, c'est à dire qu'il est nécessaire d'assimiler les concepts au fur et à mesure, pour pouvoir continuer à suivre jusqu'au bout. En particulier, les éléves n'ayant jamais vus d'expressions rationnelles ni d'automates d'états finis, doivent fournir un effort considérable les deux premières semaines (rappels), pour se mettre à niveau avec le reste. Ce recueil de TD et le support de cours se trouvent à l'adresse : https ://www.lri.fr/~gruau/

Il y à 12 cours(1h30) suivi de 12 TD(2h). Le cours prépare aux TDs. Le déroulement pour chacune des 12 semaines est le suivant :

a- Rappel

1. Cours : Panoramique, Langage formels, Expression rationnelle, lemme d'Arden, def. automate d'état fini.
   TD : Egalité langage, Expression rationnelle, Automates simples.
2. Cours : Automate non-déterministe, epsilon transitions, théoreme de kleene
   TD : Automates, suite et fin, détermination, résolution d'équation (début).

b- Approfondissement automates

3. Cours : minimisation d'un automate
   TD : résolution d'équation (autre exemple), construction d'automates, construction directe de l'automate minimal a partir du langage.
4. Cours pompage, clôture, décidabilité.
   TD pompage, clôture.

c- Grammaires Hors Contexte

5. Cours : grammaires hors contexte, arbre de dérivation, ambiguité, réécriture droite.
   TD : grammaire d'un langage, langage d'une grammaire, désambiguïser.
6. Cours : nettoyage de grammaire, FN Chomsky, décidabilité, cloture, analyse lexicale.
   TD : analyse lexicale, grammaire d'un vrai langage, est-il-algébrique (1,4,5).

d- Automates à piles

7. Cours+TD : automates à piles TD est-il-algébrique (suite)
8. Cours : Équivalence automate à pile-grammaire,clôture, premier et suivant.
   TD : est-il-algébrique (fin), Analyse ascendente à la main, premier et suivant.

e- Analyse Ascendente

9. Cours+TD : Analyse ascendente
10. Cours : automate LR(1) général, LALR(1), intro machine de Turing.
    TD : exo d'analyse ascendante (rappel + LR, LALR). machine de Turing simple

f- Machine de Turing

11. Cours décidabilité
    TD machine de Turing compliquée, décidabilité de l'ambiguïté.
12. Cours : NP complétude,
    TP en salle machine : yacc et lex

Les exercices optionnels sont plus difficiles. Ils sont conçus pour occuper les meilleurs étudiants ou vous permettre de travailler chez vous. Ils ne sont en général pas traités avec toute la classe par manque de temps. Certains

exercices plus importants ou plus difficile sont répartis sur deux TDs : le premier TD traite un exemple facile, et le TD de la semaine suivant un deuxième exemple plus difficile. C'est le cas pour les automates d'état finis (TD 1 et 2), la résolution d'équations de langages (TD 2 et 3), est-il-algébrique (TD 6,7 et 8, car il y a plusieurs méthodes), l'analyse ascendante (TD 9 et 10), les machine de Turing (TD 10 et 11).

Examens, Devoir,Rattrapage.

Seules les notes de cours manuscrites, et les poly de cours et d'exercices sont autorisés aux examens. Chaque TD fait l'objet d'un exercice au partiel ou à l'examen. Le partiel et l'examen comprennent aussi des questions de cours non traitées en TD. Les notes de partiels mauvaises pourront être "partiellement" rattrapées grâce à un devoir relativement facile, mais sur un coefficient de seulement 10 pourcent par rapport au partiel. Contrôle continu = (9* partiel + devoir)/10. L'énonce du devoir est inclus dans ce recueil, à la section 12. L'examen de rattrapage en juin, porte sur toute l'année.

1 Démonstration d'égalité entre deux langages

Les égalités suivantes sont elles vraies ? si oui, le démontrer sinon donner un contre-exemple.

1. $L^* = L^*.L^* = (L^*)^*$
2. $L.(M \cap N) = (L.M) \cap (L.N)$
3. Optionnel : $(L^*.M)^* = \{\epsilon\} + (L+M)^*.M$

2 Expression rationnelle

2.1 ExprRat d'un langage

$L_1 = \{w \mid w$ commence par $ab\}$

$L_2 = \{w \mid w$ termine par $bb\}$

$L_3 = \{w \mid w$ commence par ab et termine par $bb\}$

$L_4 = \{w \mid w$ contient trois occurrences successives de la lettre $a\}$

$L_5 = \{w \mid w$ ne commence pas par $ba\}$

$L_6 = \{w \mid w$ ne termine pas par $bba\}$

2.2 optionnel : ExprRat compliqué.

$L_7 = \{w \mid w$ ne contient pas deux occurrences successives de la lettre $a\}$

$L_8 = \{w \mid w$ ne contient pas trois occurrences successives de la lettre $a\}$

$L_9 = \{w \mid$ le nombre de a dans w est pair $\} = \{w \mid |w|_a = 0 \ (mod\ 2)\}$

$L_{10} = \{w \mid |w|_a = 1 \ (mod\ 3)\}$

2.3 ExprRat pour l'analyse lexicale.

La première étape d'un compilateur et l'analyse lexicale, qui découpe le texte d'un programme en unités lexicales appelée "token". Un token peut être un mot clef, un identifiant, une constante numérique. On utilise des expression rationnelle pour identifier la nature des différent token. On utilisera la notation "étendue"" plus compacte. Par exemple, $e? = e|\epsilon$ qui signifie que e est optionnel, $[0-9]$ signifie un chiffre.

Ecrire l'expression rationnelle décrivant :

1. un identificateur comme une lettre suivit d'une suite de lettre ou de chiffre,
2. un entier positif
3. un entier relatif
4. un nombre à virgule

3 Automates reconnaissant un langage donné.

Donner des automates reconnaissant les langages suivants : les entiers sont codés en binaire. Pour les entiers comme pour les mots habituel, on considère que les caractères sont lus de gauche a droite, donc en commençant par les bits de poids forts.

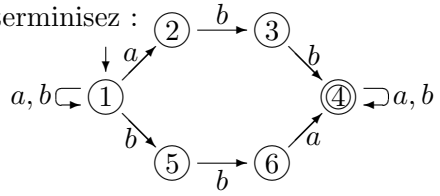
- des entiers pairs, des entiers impairs, des puissances de 2
- $A = \{0,1\}, L = \{w \mid w$ code une puissance de $4\}$
- $A = \{0,1\}, L = \{w \mid w$ code la somme de deux puissances de 4 distinctes : $4^k + 4k', k \neq k'\}$.
- $A = \{a,b\}$, $L = \{w \mid w$ commence par $abaaba\}$
- $A = \{a,b\}$, $L = \{w \mid w$ contient $aabaaab\}$
- $A = \{a,b\}$, $L = \{w \mid w$ commence par abb et termine par $bba\}$

— Les écritures de nombre à virgule
— $A = \{a, b, c\}, L = \{w \mid w$ contient au moins une fois chacune des trois lettres $\}$
— Optionnel. $A = \{a, b\}$, $L = \{w \mid |w|_a$ est pair, ainsi que $|w|_b\}$
— Optionnel $A = \{a, b\}$, $L = \{w \mid w$ contient un nombre pair de fois le facteur $bab\}$
— Optionnel. $A = \{0, 1\}$, $L = \{w \mid$ en base 2, w représente un nombre valant 1 modulo 3 $\}$

4 Déterminisation

4.1 Méthode de déterminisation.

Déterminisez :



4.2 Boum !

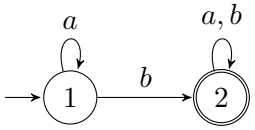
Soit L_n l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ de longueur au moins n dont la $n^{\text{ième}}$ lettre avant la fin est un b. Donnez un petit automate non-déterministe pour L_3. puis son déterminisé. Comparez leur nombre d'états. Au lieu de faire marcher l'algorithme de déterminisation, on commencera par réfléchir quels doivent être les états, puis on rajoutera les transitions.

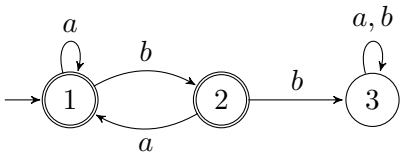
5 Resolution d'équations

Rappel de cours : à tout automate on peut associer un système d'équations dont les variables représentent les langages reconnus par cet automate à partir de chacun de ses états.

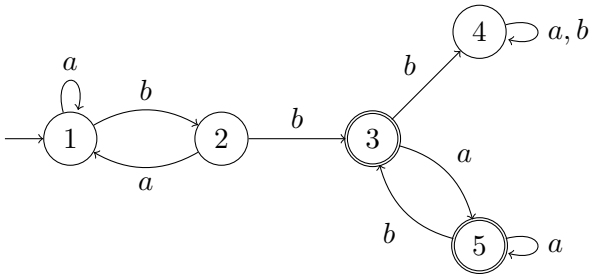
5.1 Exemple à faire

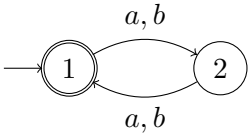
À l'aide du système d'équations précédent, que l'on résoudra par élimination et utilisation du lemme d'Arden, déterminer une expression rationnelle correspondant aux automates suivants : (sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$)





5.2 Exemple optionnel.





6 Construction d'automates.

6.1 Construction classiques

L est reconnu par l'automate $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$. Construire des automates reconnaissant :
— $miroir(L) = \{a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 a_1 | a_1 a_2 ... a_n \in L\}$
— l'ensemble des mots obtenus a partir des mots de L en effaçant tous les a.
— le complémentaire de L, en supposant A déterministe.
— Optionnel : l'ensemble des mots obtenus en effaçant un nombre pair de lettres d'un mot de L

6.2 Construction du produit synchronisé pour l 'intersection.

L_1 et L_2 sont reconnus par les automates A_1 et A_2.

On suppose que A_1 et A_2 sont déterministes complets.
— Donner un algorithme linéaire en $|u|$ pour savoir si $u \in L_1 \cap L_2$.
— En déduire la construction d'un automate déterministe reconnaissant l'intersection. il s'appelle le "produit synchronisé".
— Construire également un automate déterministe reconnaissant l'union

— Les constructions précédentes s'adaptent-elles aux automates non complet ?non-déterministes ?

6.3 Optionnel : Le barman boxeur

Un très bon exercice ludique, de Laurent Rosaz : il met en jeu des techniques de construction d'automate, il permet de bien comprendre comment le non-détermisme est fondamental pour modéliser certain problèmes. Corrigé dans l'appendice.

Un barman et un client jouent au jeu suivant : Le barman met un bandeau sur les yeux qui le rend aveugle, et il met des gants de boxe qui l'empêchent de "sentir" si un verre est à l'endroit ou à l'envers. Devant le barman, se trouve un plateau tournant sur lequel sont placés quatre verres en carré. Ces verres peuvent être à l'envers ou à l'endroit. Le sens des verres est choisi par le client et est inconnu du barman. Si les verres sont tous dans le même sens, alors le barman gagne (Quand le barman gagne, un autre client, "arbitre", annonce qu'il a gagné et le jeu s'arrête.) Le barman peut répéter 10 fois l'opération suivante : Il annonce au client qu'il va retourner certains verres (par exemple le verre en bas à gauche et celui en bas à droite). Le client fait alors tourner le plateau, puis le barman retourne les verres comme il l'a annoncé. Si les verres sont alors tous dans le même sens, le barman gagne.

1)On se place du point de vue du client. Donnez un automate dont les états sont les différentes configurations du plateau, les lettres les coups annoncés par le barman et où les flèches décrivent les évolutions possibles des configurations. Le fait que 1- le client fait tourner le plateau comme il veut, et 2- on ne se préoccupe pas que tout les verres soit a l'endroit, mais seulement qu'ils soient dans le même sens, conduit à beaucoup simplifier : il y a seulement quatre états à distinguer, et seulement trois coups possibles à jouer, pour passer d'un état à un autre.

2) A partir de l'état ou 2 verres a Cote l'un de l'autre dans un sens et les 2 autres dans l'autre, donner une séquence de coup permettant au barman de gagner. Comme on a utilisé une seule lettre pour nommer les coups, cette suite corresponds à un mot d'un langage formel.

3) Donnez un automate non déterministe (avec éventuellement plusieurs états entrée) qui donne toutes les séquences d'annonces les bons choix).

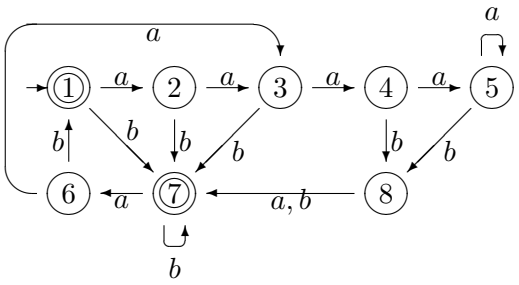
4) Donnez un automate qui donne les coups qui assurent au barman de gagner quel que soit le comportement du client. On utilisera le résultat suivant : Soit A un automate détérministe complet qui reconnaît un langage L, pour obtenir un automate qui reconnaît le complémentaire, il suffit d'inverser final/ non-final. Attention, cette méthode ne marche pas si A est non-deterministe ou si A est non-complet.

5) Jouez-vous de l'argent contre le barman ?

7 Minimisation

7.1 Construction de l'automate minimal.

Minimisez l'automates suivant :



7.2 Egalité entre automates.

Montrer que les deux automates suivants, (état initial 0), reconnaissent le même langage.

δ	0	1	2	3
a	1	2	1	3
b	3	1	3	3

état terminal : 1

δ	0	1	2	3	4	5
a	1	2	3	2	2	5
b	5	4	5	3	4	5

terminaux : 1,3,4

7.3 Construction de l'automate minimal à partir du langage.

7.3.1 Rappel de cours.

L'exercice fait intervenir des concepts un peu difficile à digérer en cours, c'est pourquoi on vous les redonne ici, résumé. Si L étant un

langage sur l'alphabet A, la relation de demi congruence syntaxique sur A^*, notée $\sim_L$, est définie par la relation suivante :$x \sim_L y$ ssi $\forall z \in A^*, (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$ C'est une relation d'équivalence. Deux mots sont en relation pour la demi-congruence, si ils ont le même avenir avec avenir$_L(u)$ qui est $\{v|uv \in L\}$. Si un automate A reconnait L, à un état q , on associe un language $Avenir_L(q)$ qui est les mots qui mènent de cet état a un final. Ce langage est précisément celui qui se calcule en résolvant les équations associé a chaque nœud avec le Lemme d'Arden. L'avenir d'un état est égal à l'avenir d'un mot qui y mène. Deux états peuvent être fusionnés, si ils ont le même avenir. Dans l'automate minimal, il y a donc un seul état par classe d'équivalence, la classe d'un état p, c'est l'ensemble des mots qui vont de q_0 à p, et l'avenir de p, c'est les mots qui vont de p a un final.

Théoreme : L reconnaissable ssi si L a un nombre fini de classes, le nombre de classe etant en fait le nombre d'états dans le determiste minimal

Si L reconnaissable, alors les classes sont en nombre fini, puisque il y a une classe par état. Si il y a un nombre fini de classe, alors on fait l'automate comme suit : un état par classe, ou, ce qui revient au même et rend la chose plus compréhensible, un état par avenir distinct. On met une flèche de p vers q avec la lettre a si Classe$(p).a$ est inclus dans classe de q, L'etat initial = la classe de epsilon, Un état est final si il a epsilon dans son avenir.

7.3.2 Calcul des classe d'équivalence et construction de l'automate.

Soit $A = \{a, b\}$. Pour chacun des langages ci-dessous, déterminer les classes d'équivalences pour la relation de congruence syntaxique. Dire s'il est reconnaissable, et si oui, construire l'automate minimal le reconnaissant, à partir de ces classes.

On procédera en choisissant d'abord des petits mots u, en calculant l'avenir de u, puis la classe de u qui est l'ensemble des mots qui on le même avenir ; On choisis u seulement parmi les mots qui sont des préfixes d'un mot du langage, les autres mots ont tous le même avenir : l'ensemble vide, et sont donc dans la même classe qui corresponds à un état poubelle dans l'automate minimal.

1. A^*
2. $\{a\}$
3. a^*b^*
4. $abba + ababa$
5. $\{a^nb^n, n \geq 0\}$
6. Optionnel : $\{uu|u \in A^*\}$

8 Le lemme de la pompe

8.1 Non pompabilité

Montrez, en utilisant le lemme de la pompe que les langages suivants ne sont pas reconnaissables

— $\{a^nb^{2n}|n \geq 0\}$
— $\{(ab)^nc^n|n \geq 0\}$
— $\{a^nb^m \mid n \geq m \geq 0\}$
— $\{a^nb^m \mid m \geq n \geq 0\}$
— $\{a^nb^n|n \geq 0\} + \{a^pb^q|p \neq q[7]\}$
— optionnel $\{a^nb^m|n \neq m\}$

8.2 Pompabilité-optionnel

Montrez que le langage suivant est pompable mais pas reconnaissable : $\{b^ma^nb^n \mid m > 0, n \geq 0\} \cup a(a + b)^*$

9 Clôture langages réguliers.

En utilisant les propriétés de clôture des langages rationnels et le fait que $\{a^nb^n\}$ n'est pas rationnel, montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :

— $L1 = \{w \in (a + b)^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
— $L2 = \{a^nb^p \mid n \neq p\}$
— $L3 = \{a^{2n}b^{2n} \mid n \geq 0\}$
— $L4 = \{a^nb^p|n \geq p\}$

Pour le dernier, vous pourrez utiliser deux méthodes : Une première qui établit une relation entre $\{a^nb^p|n \geq p\}$ et $\{a^nb^p|n > p\}$. Une deuxième qui utilise la stabilité des reconnaissables par miroir.

.

10 Grammaires hors contexte

10.1 De la grammaire vers le langage

Déterminer les langages engendrés par les grammaires dont les règles de production sont les suivantes :

1. $S \to \epsilon \mid aaaS$
2. $S \to ab \mid aSb$
3. $S \to XY \mid Z\,; X \to Xa \mid a\,; Y \to aYb \mid \epsilon\,;$ $Z \to aZb \mid W\,; W \to bW \mid b$
4. $S \to SS \mid \epsilon \mid (S)$
5. $S \to SS \mid () \mid [] \mid (S) \mid [S]$
6. $S \to \epsilon \qquad S \to a_i S a_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$
7. $S \to bS \mid aT\,; T \to aT \mid bU\,; U \to aV \mid bS\,;$ $V \to aT \mid bU \mid \epsilon$

Ces grammaires sont-elles ambiguës ? Si oui, pouvez-vous donner une grammaire non-ambiguë ?

10.2 Du langage vers la grammaire

Trouver des grammaires pour les langages suivants.

1. $(a + (a + b)^*)(ab^*)^*$
2. $\{a^n b^p \mid 0 < p < n\}$
3. $\{a^n b^p \mid 0 \leq n \leq p + 1\}$
4. $\{a^n b^n c^m d^m \mid n, m \in \mathcal{N}\}$
5. $\{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathcal{N}\}$
6. $\{a^n b^m c^p \mid n = m \text{ ou } m = p\}$
7. optionnel $\{a^n b^m c^p d^q \mid n + q = m + p\}$
8. optionnel $\{a^n b^m c^p d^q \mid n + p = m + q\}$

10.3 Désambiguiser à la main

Soit F_1 la grammaire

$$E \to E + E \mid E - E \mid (E) \mid id$$

et G_1 la grammaire F_1 plus les règles :

$$E \to E * E \mid E/E \mid E \wedge E$$

1. Donner tous les arbres de dérivations du mot $id - id - id$. Combien y en a-t-il ? Correpondent-ils à des interprétations équivalentes ?
2. Donner des grammaires F_2 et G_2 telles que $L(F_1) = L(F_2)$, que $L(G_1) = L(G_2)$, que chaque mot w possède une seule dérivation à partir du symbole initial de G_2, et que la décomposition en arbre corresponde au regles usuelles de priorité.

11 Grammaire et compilation.

Faut avoir parlé d'analyse lexicale en cours.

11.1 Analyse lexicale

l'utilisation d'ocamllex n'est pas limitée a l'analyse lexicale des que l'on souhaite analyser un texte (chaîne, fichier, flux) sur la base d'expressions régulières, ocamllex est un outil de choix en particulier pour écrire des filtres, i.e. des programmes traduisant un langage dans un autre par des modifications locales et relativement simples.

Écrire un programme occamlex qui imprime un fichier en ayant préalablement enlevé toutes les lignes vides, et un autre qui compte les occurrences d'un mot dans un texte le mot et le nom du fichier texte sont passés en paramètres

11.2 Grammaire d'un Language de programmation

Considérons le petit programme suivant écrit en Pascal :

```
program calcul;
var
  T : array[1..10] of integer;
  S,I : integer;
begin
  S:=0; (* initialisation *)
  for I:= 1 to 10 do
  begin
    read(T[I]);
    S := S + T[I]
  end;
  writeln(S)
end.
```

L'analyseur lexical découpe ce programme en une liste des entités lexicales appelées "token" dont nous donnons ici le début :

program <0>	calcul <-1,50>	; <11>			
var <1>	T <-1,51>	: <12>	array <2>	[<13>	1 <3,1>

Chaque token est donné par une classe et sa valeur, s'il y en a une. Pour les identificateurs, la valeur sera la chaine de caractére, ou mieux, l'adresse d'entrée dans une table des symboles.

Lorqu'elle rencontre des identificateurs, l'analyse lexicale les ranges dans une table des

symboles qui permettra de centraliser les informations rattachées aux identificateurs. Aprés l'analyse lexicale, cette table sera :

adresse	chaîne	information
0	program	
1	var	
2	array	
3	of	
4	integer	
5	begin	
6	for	
7	to	
8	do	
9	end	
⋮	⋮	
50	calcul	
51	T	
52	S	
53	I	
54	read	
55	writeln	
⋮	⋮	

La table est découpée en une zone pour les mots-clés, occupée ici de 0 à 9 et une zone pour les identificateurs à partir de 50. Cette table est composée d'un champ représentant la chaîne de caractères et d'un champ pouvant contenir différentes informations utiles à l'analyse sémantique. On suppose les différentes entités rangées dans l'ordre de leur apparition, sauf les mots-clés qui sont chargés préalablement dans la table. Les symboles ;: [], ., .. sont associés dans l'ordre à des tokens de classe 11 à 17 ; Comme il n'y a qu'une unité lexicale dans chacune de ces classes il n'est pas nécessaire de passer de valeurs.

On souhaite écrire un grammaire permettant de générer des programme Pascal, et en particuler notre programme. Plus précisément, la grammaire doit générer non pas le texte du programme mais le "mot" représentant la suite de token de ce programme. On commence par quelques questions pour déjà mieux comprendre c'est quoi ce "mot".

1. A quoi corresponds la classe d'un token pour cette grammaire ?
2. A quoi corresponds la classe -1, sur cet exemple ?
3. Que sont les mots clefs pour cette grammaire ?
4. Quelle valeur a un token constante entiére, à quelle étape on la calcule, et comment la calculer ?
5. Proposer une grammaire permettant d'engendrer le langage auquel ce programme appartient.
6. Donner l'arbre de dérivation syntaxique associé à ce programme. Il couvre plusieurs pages, on pourra le finir chez soi. Indiquez les valeurs des tokens.
7. Lorsqu'on compile, on construit une version résumée de l'arbre d'analyse appelée "Arbre de Syntaxe Abstraite" (AST). Elle contient juste les informations utiles. Proposer un AST pour ce programme.

12 DM pour mardi 17 mars.

Ce devoir est à faire individuel. Il est à rendre impérativement à votre prof de TD, sauf le groupe du mercredi qui peut le rendre ou bien en cours, ou bien à Sandrine. Un devoir rendu après mardi 17 mars aura pour note zéro.

Ce DM reprends le TD11.2 qui va trop vite pour que tout le monde comprenne. Il vous permettra de 1- dissocier le travail fait par l'analyse lexicale 2- apprendre à écrire des grammaires "grandeur nature" 3- Aborder la notion de syntaxe abstraite.

On considére le programme PASCAL suivant :

```
program factoriel ;
var
  i,n : integer ;
  f : longint ;
begin
  write(' Donner un entier : ') ;
  readln(n) ; f:=1 ;
  for i:=2 to n do
    f:= f * i ;
  writeln('Le  factoriel est ',  f);
End.
```

12.1 Analyse lexicale : Classe, valeur

L'analyseur lexical découpe ce programme en token (comprenant toujours une classe et parfois une valeur) et range les identificateurs dans une table des symboles.

1. Que code le numéro de classe d'un token ?
2. Les identificateurs sont ils tous de la même classe ?
3. Les mots clefs sont ils tous de la même classe ?

4. Quelle valeur a un token identificateur ?
5. Quelle valeur a un token mot clef ?
6. Comment peut on reconnaître les mots clefs de facon simple, lors de l'analyse lexicale ? (On suppose que les mot clefs sont préchargés dans cette table.)
7. Décrivez l'état de la table des symboles, aprés l'analyse lexicale.
8. Ecrire la suite de tokens générée par ce programme, avec les classes et les valeurs des tokens. pour le bout suivant

```
for i:=2 to n do
  f:= f * i ;
```

12.2 Analyse syntaxique

1. Construction de la grammaire : Proposer une grammaire permettant d'engendrer un langage auquel ce programme appartient. On convient qu'un non-terminal commence par une majuscule et que les terminaux (correspondant aux classe de tokens) commencent par une minuscule
2. Analyse syntaxique : Dessiner l'arbre de dérivation syntaxique généré pour l'analyse de ce programme. Comme il est très grand, utiliser plusieurs pages. On indiquera aussi la valeur des tokens, lorqu'il y en a une.
3. Syntaxe abstraite : Proposer un AST résumant les informations contenue dans le programme.

13 Optionnel grammaire

13.1 Nettoyage de grammaires

On veut nettoyer une grammaire, c'est à dire enlever :

(1) Les non-terminaux impasse, c'est à dire qui ne produisent pas de mots sur A^*

(2) les non-terminaux inaccessibles , c'est à dire qui ne figurent dans aucune dérivation faite à partir de S.

Donner un algorithme permettant de repérer (et donc d'éliminer) les impasses

Donner un algorithme permettant de repérer (et donc d'éliminer) les inaccessibles

Quand on veut faire un nettoyage complet, l'ordre dans lequel on effectue ces deux opérations est-il indifférent ? Pourquoi ?

Nettoyer la grammaire :

$S \to X \quad X \to Y \quad Z \to W|eS$
$W \to b|fX \quad Y \to aT|TK$
$U \to bdX|Y|dZ \quad K \to cV|Z$
$X \to abcY \quad W \to U$
$T \to aT|\epsilon|ef|aY \quad V \to af$

13.2 Désambiguïsation difficile.

Soient D_1, D_2 et D_3 les langages suivants :

$$D_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$$

$$D_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b \text{ et}$$
$$\forall v \text{ préfix de } w \ \ |v|_a \geq |v|_b\}$$

$$D_3 = \{w^R \in \{a,b\}^* \mid w \in D_2\}$$

On veut donner une grammaire pour D_1 non ambigue. Montrer comment obtenir D_1 avec les opérations de concaténation et d'étoile à partir du langage D_2 (Dyck d'ordre 1) et de son miroir D_3. Utiliser cette description et les résultats de clôture pour lui trouver une grammaire non-ambiguë.

13.3 Grammaire difficile à trouver

Donnez une grammaire pour $\{w \in (a+b)^* \mid |w|_b = 2|w|_a\}$

13.4 Grammaires contextuelles

On considère l'ensemble de règles de réécriture suivant :

$S \to aTc \quad aT \to aaTcT \quad cT \to Tc \quad aT \to ab \quad bT \to bb$

Quel est l'ensemble des mots sur $\{a,b,c\}^*$ dérivables à partir de S ?

14 Automates à pile

Dans la mesure du possible, donnez des automates à pile déterministe.

1. Construire un automate à pile qui reconnaît par état final $\{a^n b^n | n \geq 1\}$, puis $\{a^n b^n | n \geq 0\}$.
2. Construire un automate à pile qui reconnaît le langage $\{a^p b^n c^q | p \geq 0, q \geq 1, n = p+q\}$ par pile vide.

3. Construire un automate à pile qui reconnaît le langage des mots de Dyck sur 1 puis sur 2 types de parenthésés.
4. Construire un automate à pile qui reconnaît le langage des mots qui ont autant de a que de b (deux solutions : la premiere n'utilise qu'un état, la seconde qu'un seul symbole de pile)
5. Construire un automate à pile qui reconnaît le langage des palindromes.
6. Cherchez des automates a pile qui reconnaissent $\{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$ et $\{a^n b^m a^n b^m | n, m \geq 0\}$.

15 Est il Algébrique ? Clôture, pompe.

Les langages suivants sont-ils algébriques ? On utilisera les quatre méthodes possibles pour répondre à cette question : On montre qu'un langage est algébrique, en 1- le générant par une grammaire hors contexte ou 2-le reconnaissant par un automate à pile. On montre par l'absurde qu'un langage n'est pas algébrique avec 3- les propriétés de clôtures 4- La contraposée du lemme de la pompe algébrique

1. $\{a^n b^m \mid m \neq n \text{ et } m \neq 2n\}$
2. $\{a^n b^m a^n b^m \mid n, m \in \mathcal{N}\}$
3. $\{a^{n^2} \mid n \in \mathcal{N}\}$
4. $\{u \mid \ |u|_a = |u|_b = |u|_c\}$
5. $\{uu \mid u \in A^*\}$
6. optionnel Le complémentaire du précédent.
7. $\{u \mid \ |u|_a + 3|u|_b = 2|u|_c\}$
8. $\{u \mid \ |u|_a = 3|u|_b = 2|u|_c\}$
9. $\{a^n b^n a^n b^n | n \geq 0\}$
10. optionnel $\{a^p b^q c^r | p \leq q \leq r\}$
11. optionnel $\{a^n b^n (ab)^n | n \geq 0\}$
12. optionnel $\{f(y) \mid y \in Y\}$ où Y est algébrique et ù $f(a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 ...) = a_1\, a_3\, a_5 ...$ (f efface les lettres qui sont à une position paire)
13. optionnel $\{a^p b^q c^r d^s e^t f^u | (p, q, r, s, t, u)$ croit ou décroit $\}$

16 Analyse Syntaxique.

16.1 Analyse ascendante à la main.

Le cours d'analyse syntaxique ascendante sera fait la semaine prochaine. Néanmoins, ce TD introduit gentiment un exemple concret sur ce thème. De cette façon, les notions du cours, plus abstraites, seront plus digestes. Soit la grammaire suivante :

$$\begin{array}{lll|lll} E & ::= & E + T & E & ::= & T \\ T & ::= & T * F & T & ::= & F \\ F & ::= & id & F & ::= & cte \end{array}$$

1. Que reconnait t'elle ? est elle ambigue ?
2. Utiliser la grammaire pour générer la chaîne *id*id+cte* par une dérivation droite.
3. On considére un formalisme étendu d'automate à pile qui permet de dépiler un nombre arbitraire de symboles de la pile. Cela change t'il la puissance du modèle ?
4. Écrivez l'automate à pile suivant, pour cette grammaire : Il utilise un seul état et deux sortes de transitions : 1- pour chaque régle $X \to \alpha$, une transition appelée "reduction" qui ne lit pas le mot (epsilon transition), qui dépile α et empile X. 2- pour chaque terminal a une transition appellée "lecture" ou "shift" (traduc anglais) qui lit a et empile a.
5. L'automate de la question précédente permet de reconnaître le langage associé à la grammaire, avec une analyse "ascendante", i.e en remontant des feuilles vers la racine. Reconnaître la chaîne *id*id+cte*. On mettra la colonne de l'état de pile à gauche de celle de l'état du mots.
6. Cet automate n'est pas déterministe, préciser pourquoi :
7. Est ce que c'est gènant ?
8. Ben KesKiFautfaire alors ?
9. Un peu d'introspection, vous-même, quelle stratégie avez vous suivi pour orienter vos choix, lorsque vous avez utilisé l'automate à la main.
10. L'analyse LR(1) autorise un automate a pile à consulter quelle est la prochaine lettre du mot à lire, sans pour autant la "consommer". Mais alors, quelle sera cette lettre, lorsqu'on sera arrivé au bout du mot ?

16.2 Calcul premiers et suivants

Soit la grammaire :

S	$::= AaB$		
A	$::= CB$	A	$::= CBb$
A	$::= \epsilon$	A	$::= CAd$
B	$::= b$		
C	$::= c$	C	$::= \epsilon$

1. Pour chaque non terminal X calculer premier(X). Commencer par écrire les équations et pour cela regarder les règles ou X apparaît dans le membre GAUCHE.
2. Pour chaque non terminal X calculer suivant(X). Commencer par écrire les équations et pour cela regarder les règles ou X apparaît dans le membre DROIT.

16.3 Exemple simple d'automate SLR(1), et son exécution.

Soient les grammaires :

S	::=	L	
L	::=	L ;A	| A
A	::=	a	

S	::=	L	
L	::=	A ;L	| A
A	::=	a	

S	::=	L	
L	::=	L ;L	| A
A	::=	a	

1. Montrer que ces grammaires engendrent le même langage.
2. Pour chaque grammaire si elle est LR(0), si nécessaire construire l'automate d'item et identifiez les conflits, puis essayer de les résoudre en utilisant l'automate SLR(1).
3. Faire tourner l'automate et comparer la taille de la pile lors de l'analyse ascendante du mot $a; a; a$ par les deux premières grammaires. Quelle remarque peut-on faire ?
4. Pour les deux premières grammaires, montrez que le langage reconnu par l'automate LR(0) est le langage des mots de pile.

16.4 Analyse syntaxique des expressions arithmétiques ;

Soit la grammaire des expressions arithmétiques déjà vue en cours :

E	::=	E+T —T,
T	::=	T *F —F
F	::=	Id — Cte

Construire L'automate LR(0) puis l'automate SLR(1) si nécessaire.

16.5 Autre example d'analyseur LR

S	::=	E ♯
E	::=	`id`
E	::=	`id`(E)
E	::=	E + `id`

Construisez l'automate LR(0) permettant de faire l'analyse ascendante. Cet automate présente un conflit, indiquer l'état ou il se trouve, et entre quoi et quoi il y a conflit Expliquer comment résoudre ce conflit.

16.6 Exemple plus difficile, l'analyse SLR(1) ne marche pas.

On se donne un langage de types permettant de décrire le type des entiers ou celui de fonctions à valeur entière, prenant en argument des entiers ou d'autres fonctions de même nature. Un type est donc soit la constante `int` soit de la forme $\tau_1 * \ldots * \tau_n \rightarrow$ `int` avec τ_i des types. Pour reconnaître ce langage de types, on se donne la grammaire suivante avec comme ensemble de terminaux $\{\sharp, \rightarrow, *,$ `int`$\}$ et comme ensemble de non-terminaux $\{S, A, T\}$ avec S l'axiome :

S	::=	T ♯
T	::=	`int`
T	::=	A →`int`
A	::=	T
A	::=	T * A

1. Calculer les suivants de T et de A.
2. Construire la table d'analyse SLR(1) de cette grammaire en indiquant en cas de conflit les différentes actions possibles. Cette grammaire est-elle SLR(1) ?
3. Expliquer la nature du conflit obtenu en donnant un exemple d'entrée où ce conflit se produit. La grammaire donnée est-elle ambiguë ?
4. Que suggérez-vous pour remédier à ce problème ?

17 Machine de Turing

Dessiner une Machine de Turing pour les différentes tâches suivantes. On indiquera à

quoi servent les états, on pourra aussi dessiner les états de la machine, en particulier lorsque les conditions de sortie d'une boucle sont vérifiées.

- ajouter 1 à une séquence de 1
- ajouter 1 à un nombre écrit en binaire.
- reconnaître le langage $\{a^{2^n}/n \in \mathbb{N}\}$
- dupliquer le mot en entrée
- reconnaître le language $\{ww, w \in \{0,1\}^*\}$.
- calculer la fonction $n \mapsto n+1$.

18 Decidabilité

18.1 Decidabilité problème du mot

Soit H une grammaire et $u = u_1\, u_2 \ldots u_{|u|}$ un mot. On voudrait savoir si le mot u est dans le langage engendré par H. Pour cela, on met d'abord H sous forme normale de Chomsky, Rappel : les règles sont de la forme $M \to \epsilon; X \to YZ; X \to x$; l'axiome n'est pas en membre droit, et seul l'axiome génére epsilon. Puis on remplit un tableau T de type `array[0..|u|,0..|u|] of subset de NT` (où NT est l'ensemble des non terminaux de H) avec M dans $T[i,j]$ pour $j \geq i$ ssi $M \to^* u_i\, u_{i+2} \ldots u_j$. ($T[i,j]$ pour $j < i$ est sans signification). Comment calculer les valeurs de ce tableau ? Comment déduire de ce tableau le fait que u est dans le langage ou non ? Quelle est la complexité de cet algorithme ?
On considérera l'exemple ou la grammaire est $S \to \epsilon; S \to aSb$ qui génére $\{a^n, b^n\}$ On souhaite montrer que $aabb$ est dans le langage, on indexe les lettre $a_1a_2b_3b_4$ et on réécrit dans chaque case le sous mot associé a la case.

18.2 Indecidabilité problème de Post

Définition problème de Post : Les données du problème sont deux listes finies $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N$ de mots d'un alphabet A ayant au moins deux symboles. Une solution du problème est une suite d'indices $(i_k)_{1 \leq k \leq K}$ avec $K \geq 1$ et $1 \leq i_k \leq N$ pour tous les k, telle que les concaténations $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_K} et \beta_{i_1} \ldots \beta_{i_K}$ soient égales. Le problème de correspondance de Post (PCP) consiste à déterminer si une solution existe ou non. Résoudre les trois problèmes de post suivants, ou on donne la suite des paires (α_i, β_i).

- (a,baa) , (ab,aa) ,(bba,bb)
- (bb,b),(ab,ba),(c,bc)
- (#, #p00000000#), (0, 0), (1, 1), (#, #), (p0, 0p), (p#, q#), (0q, 1p), (1q, q0), (# q0, #q), (#q#, #). Sur ce dernier problème de Post, on impose de plus de commencer par la première paire (#, #p00000000#). On peut montrer que les problèmes de Post ainsi contraints sont équivalents aux problèmes de Post en général (on peut encoder les un par les autre).

18.3 Indecidabilité de l'ambiguïté

A un problème de Post $(u_i, v_i)i \in \{1, \ldots N\}$ sur l'alphabet A = a, ..., z , associons les grammaires suivantes :

```
S2-> $ | #S2 | T
T->T# | U
U->aS2 a | ... | zS2z

S1 ->u1 # S1 # miroir(v1 )
   ->u2 # S1 # miroir(v2 )
....

  -> uN # S1 # miroir(vN )

  ->  u1 # $ # miroir(v1 )
  ->  u2 # $ # miroir(v2 )
 ...
 -> uN # $ # miroir(vN )

S -> S1 | S2
```

- Que génére la grammaire S2
- Que génére la grammaire S1
- A quelle condition la grammaire avec l'axiome S est elle ambigue
- Donner un exemple de grammaire ambiguë en utilisant les système de post donnés en exemple.
- En déduire que le problème de savoir si une grammaire est ambiguë est indécidable .

18.4 Indécidabilité de l'intersection.

Considérons le problème suivant : soit G_1, G_2 deux grammaires, peut on décider si l'intersection des langages qu'elles génére est non vide ?

19 TP d'analyse syntaxique.

L'objectif du TP est de comprendre le fonctionnement d'un analyseur syntaxique associé à une grammaire puis d'étendre son fonctionnement en lui ajoutant des éléments. Nous utiliserons pour cela l'outil **Yacc**, un générateur d'analyseurs syntaxique associé au générateur d'analyseurs lexical **Lex** dans leur versions pour Ocaml (ocamlyacc et ocamllex).

19.1 Analyseur syntaxique simple

Le squelette de base d'un analyseur syntaxique vous est fournis. Les programmes `express.mli`, `express.ml`, `ana_lex.mll`, `ana_synt.mly` et `test_expr.ml` vous permettent de générer un analyseur syntaxique et de l'utiliser pour effectuer une analyse permettant d'afficher l'arbre de syntaxe abstraite d'une expression arithmétique ne comprenant que des additions et des soustractions. Dans un premier temps, vous analyserez le squelette de l'application et la modifierez pour ajouter des éléments à la grammaire.

- Lisez les différents fichiers et comprenez leur fonctionnement. Écrivez la grammaire reconnu par l'analyseur syntaxique.
- Compiler le programme en utilisant la commande *make*. Quelle est la signification du message adressé par Ocamlyacc ? Que se passe t-il quand vous exécuter tout de même le programme ?
- Modifier la définition de la grammaire pour enlever l'ambiguïté
- Rajouter le cas de la multiplication et de la division. Celle-ci doivent être prioritaire sur l'addition et la soustraction. Ajouter ensuite le cas des expression parenthésées. *D'autres fichiers sont amenés à être modifier pour observer les résultats* On pourra tester $3+4*5+2$ et tester que ca calcule bien 25, i.e que le parenthésage implicite se fait autours de (4*5) à cause des règles de précédence.

19.2 Evaluer les expressions

Comme vous avez pu le constater précédemment, en même temps qu'il reconnait un mot, **Yacc** construit l'Arbre de Syntaxe Abstraite (AST). Pour cela, lorsqu' une règle matche, ocamlyacc execute le code placé dans les `{}` et calcule la valeur d'une variable associée au non-terminal du membre gauche. Pour cela il utilise la valeur des variables associée au i^{eme} symbole (qui doit être aussi non-terminal) du membre droit, dénotée $\$_i$ Dans cette partie, vous serez amenez à modifier ce code

- Modifiez le code executé afin de calculer la valeur plutôt que l'AST des l'expressions reconnues.
- Rajouter des registres pour que le programme puisse maintenant affecter des variables et les utiliser. Il vous faudra pour cela modifier la grammaire de façon plus significative. `[A<-6][B<-7]2*B+A` est une expression valide ou les variables A et B peuvent être utilisé dans le calcul. Ici, l'expression est évalué a 20.

20 Corrigés optionnels

Ils ne sont pas tous là. Si vous souhaitez avoir un corrigé sur un Optionnel spécifique, demandez moi, je le rajouterai.

20.1 Démonstration d'égalité entre deux langages

$(L^*.M)^* = \{\epsilon\}+(L+M)^*.M$ On utilise donc la double inclusion comme cela a déjà était fait en cours et en TD.

Dans le sens $(L^*.M)^* \subseteq \{\epsilon\} + (L+M)^*.M$

Si $w = \epsilon$, trivial. Si $w \neq \epsilon$, alors $w \in (L^*.M)^n$ $(n > 0)$, donc il peut s'écrire comme $k_1 \ldots k_n$ avec $k_i \in (L^*.M)$. On écrit chaque k_i comme $l_i.m_i$ avec $l_i \in L^*$ and $m_i \in M$. On a $l_i \in L^* \subseteq (L+M)^*$ et $m_i \in (L+M)^*$, donc $u = l_1.m_1 \ldots .l_{n-1}.m_{n-1}.l_n \subseteq (L+M)^* \ldots .(L+M)^* \subseteq (L+M)^*$ et donc $w = u.m_n \in (L+M)^*.M$.

Dans l'autre sens $\{\epsilon\} + (L+M)^*.M \subseteq (L^*.M)^*$

Si $w = \epsilon$, alors $w \in (L^*.M)^*$. Si $w \neq \epsilon$, $w = v.m$ avec $v \in (L+M)^*$ et $m \in M$. On peut écrire v comme $k_1 \ldots .k_n$ avec $k_i \in (L+M)$. On démontre par récurrence sur n que $v.m \in (L^*.M)^*$. Si $n = 0$, trivial. Suppose vrai jusque $n-1$. Si pour tout h, v_h est dans L, alors trivial, sinon soit g le plus petit indice tel que v_g est dans M. On applique l'hypothèse de récurrence à $k_{g+1} ... k_n.m$ et on dit que $k_1 ... k_g \in L^*M$

20.2 Expression rationnelle

ExprRat compliqué.

1. $L_7 = \{w \mid w$ ne contient pas deux occurrences successives de la lettre $a\}$ Correction : $(\epsilon + b + a.b)^*.(\epsilon + a)$
2. $L_8 = \{w \mid w$ ne contient pas trois occurrences successives de la lettre $a\}$ Correction : $(\epsilon + b + a.b + a.a.b)^*.(\epsilon + a + a.a)$
3. $L_9 = \{w \mid$ le nombre de a dans w est pair $\} = \{w \mid |w|_a = 0 \ (mod\ 2)\}$ Correction : $(b^*.a.b^*.a.b^*)^*$
4. $L_{10} = \{w \mid |w|_a = 1 \ (mod\ 3)\}$ Correction : $(b^*.a.b^*).(a.b^*.a.b^*.a.b^*)^*$

20.3 Automate reconnaissant un langage donné.

— Nombre pair de facteur u : faire deux occurences de l'automate cherchant le facteur u. Dans la premiere version, j'ai lu le facteur un nombre pair de fois (sauf à l'extremité de l'automate ou je viens de lire une occurence de plus), dans la deuxieme impair. Quand j'ai reussi a lire un u de plus, la parite change, on se dirige donc vers l'autre automate. Donc pour chacune de deux versions, remplacer la flèche qui conduit à l'état le plus à droite, par une flèche qui passe sur l'autre version, dans l'état ou on a deja lu v, v etant le plus long préfixe de u qui est aussi suffixe de u, avec v different de u.
Pour $u = bab$, ca fait six etats (1, a, 1) (1, b, 2) (2, b, 2) (2, a, 3) (3, a, 1) (3, b, 2') (1', a, 1') (1', b, 2') (2', b, 2') (2', a, 3') (3', a, 1') (3', b, 2). Initial 1, finals 1 2 et 3

— Nombre pair de a et de b : Encore plus dur, l'automate à 4 états : on se souviens si on a lu un nombre pair/impair de a et itou pour b (0, a, 1), (1, a, 0), (2, a, 3), (3, a, 2), (0, b, 2), (2, b, 0), (1, b, 3), (3, b, 1) final is 0 En utilisant Arden, on trouve : $(aa + bb + (ab + ba)(bb + aa)^*(ab + ba))^*$.

— multiples de trois : difficile, surtout l'expression. il faut commencer par l'automate. Il y a 3 états numérotés 0,1,2. On est dans l'état i quand a lu un nombre qui vaut i modulo 3. Pas besoin de faire un cas spécial pour epsilon car 0 pas reconnu. Si j'ai lu un i mod 3 et que la prochaine lettre est j, je vais en $(2i + j)[3]$ (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 2), (2, 0, 1), (2, 1, 2). L'état final est 1. L'état initial est 0. Pour l'expression, On utlise Arden : $(0 + 1(01^*0)^*1)^*$

20.4 Construction d'automates

Automate reconnaissant l'ensemble des mots obtenus en effaçant un nombre pair de lettres d'un mot de L : Correction : On fait le produit synchronisé avec l'automate reconnaissant un nombre pair de lettres, qui a seulement deux états 0, et 1, ou l'état 0 reconnait les mots de longeur paire. On enléve toutes les lettres des transitions ; on rajoute les transition (q,0) $-a->$ (q',0)) et (q,1) $-a->$ (q',1)) si q, $-a->$ q' etait une transition de l'automate reconnaissant L. On obtient un automate non déterministe, on peut choisir à tout instant d' aller se balader dans les état (*,1) quand on reviendra dans les (*,0), on aura effacé deux lettres. Les états final sont donc (q,O) ou q est final.

Le barman aveugle

question 1 : Il y a 4 configurations possibles :

— T : les verres Tous retournés dans le meme sens
— U : Un verre retourné dans un sens, et les 3 autres dans l'autre
— D : 2 verres en Diagonale dans un sens et les 2 autres dans l'autre
— C : 2 verres a Coté l'un de l'autre dans un sens et les 2 autres dans l'autre

3 coups possibles (on laisse "tout retourner" et "rien retourner" qui ne font rien)

— u : retourner un verre (revient au meme qu'en retourner trois)
— d : retourner deux verres en diagonale
— c : retourner deux verres cote à cote

Etats initiaux : tous (au choix du client) Les

		u	d	c
	T	U	D	C
transitions :	U	T,D,C	U	U
	D	U	T	C
	C	U	C	T,D

question 2 : Il suffit de jouer "cd". 'c' oblige le barman à passer dans D, puis 'd', fait gagner

le client.

question 3 : Le client gagne si il fait se balader dans l'automate ci-dessus sans passer par l'état T. Donc l'automate en question est celui-ci dessus dans lequel on enleve l'etat T, et où tous les états sont finaux

question 4 : Il faut reconnaître le complémentaire. Donc on déterminise l'automate ci-dessus. Attention : l'état initial sera la réunion des trois états U,C,D. On voit que l'on peut progressivement réduire l'incertitude, c'est a-dire que nos états vont être des ensembles d'états de plus en plus petits. Le non-deterministe avait tous ses états finaux, le déterminisé a donc aussi tous ses états finaux. On rajoute la poubelle, seul états non-final. Puis on intervertit les finals et non-finals, pour trouver le complémentaire. La poubelle se retrouve donc seul état final. On trouve une séquence gagnante (un mot reconnu) qui est dcdudcd. Youpi !

20.5 Minimisation

Calcul des classe d'équivalence de la demi congruences pour le langage $\{uu|u \in A^*\}$

Correction : Toutes les classes sont des singletons. Si $u \neq v$, alors il y a un mot w tq uw est carre ouexclusif vw carre : si $|u| = |v|$, prendre u, si $|u|$ pair et $|v|$ impair, idem. Si $|u| > |v|$ meme parite, considerez $\{x|\,|x| = |u|, ux$ carre$\}$ et $\{x|\,|x| = |u|, vx$ carre$\}$. Le premier est un singleton, le second contient $2^{|u|-|v|}$ mots. donc y a un w dans le second qu'est pas dans

20.6 Le lemme de la pompe

Non Pompabilité Montrez que $\{a^n b^m | n \neq m\}$ n'est pas rationnel.

Correction : soit N quelconque, je choisi $u = a^N b^{N+N!}$,soit une décomposition quelonque $u = xyz$, $|y| > 0$, $|xy| <= N$, on a y tombe dans les a, $y = a^k$,et $a^{N-k}(a^k)^{(1+N!/k)}b^{N+N!}$ sort du langage, par ce que quand on regroupe les a, on se rends compte que l'exposant vaut celui de b.

Pompabilité Montrez que le langage suivant est pompable mais pas reconnaissable : $\{b^m a^n b^n \mid m > 0,\, n \geq 0\} \cup a(a+b)^*$.

Correction : soit $N = 2$, soit u un mot quelconque de longeuer au moins 2, s'il est dans $a(a+b)^*$, je peux pomper la deuxieme lettre, s'il est en $b^{\geq 2}a^n b^n$, je peux pomper le premier b, je reste dans $\{b^m a^n b^n\}$, s'il est en $ba^n b^n$, je peux pomper aussi le premier b, puissance 0, je suis dans $a(a+b)^*$, puissance 2 et plus, je suis dans $\{b^m a^n b^n\}$. S'il était reconnaissable, alors son intersection avec le reconnaissable $b(a+b)^*$ le serait aussi, mais c'est $\{ba^N b^N\}$ qui lui n'est pas pompable

20.7 Grammaires hors contexte

Trouver des grammaires pour les langages suivants. $\{a^n b^m c^p d^q \mid n+q = m+p\}$

Correction : $L7 = \{(a^n b^n)b^m(c^p d^p)d^m\} + \{a^n(a^m b^m)c^n(c^p d^p)|m > 0\}$ (on décompose suivant plus de a que b ou contraire) d'ou grammaire non ambiguë

$L8 = \{a^n b^m c^p d^q \mid n+p = m+q\}$: $S- > aSd|T|U$;

Correction : $T- > ...a^x b^{x+y} c^y; U- > b^x c^{x+y} d^y, y > 0$, (ambigu si je met pas le $y > 0$, cas ou autant de a que de d) Donc pour $L8$ on décompose suivant plus de a que de b. (faire un dessin ou monte de 1 avec un a ou c, descent de avec b ou d) $L8 = a^n(a^p b^p)(c^m d^m)d^n + (a^n b^n)(b^m c^m)(c^p d^p)$ ambigu, on enlève l'ambiguïté en forçant $m > 0$ dans le second par exemple.

20.8 Optionnel grammaire

Désambiguation difficile. Correction : La solution simple est ambigue. $D1- > aD1b|bD1a|D1D1|epsilon$ ambigu $D1- > aD1bD1|bD1aD1|epsilon$ ambigu, cf abab. Faire des graphes, monte de 1 sur un a, descend sur un b. $D1$ = part de 0, finit en 0, $D2$ = part de 0, finit en 0, reste au dessus de 0, $D3$ = part de 0, finit en 0, reste au dessous de 0. $D1 = (D2+D3)^*$ On décompose un mot de $D1$ en une suite de mots, non nulls, en coupant a chaque fois que ca croise 0. On génère de facon non ambiguë un mot de $(D2+D3)^*$ Un mot de $D2$ non vide s'écrit $aD2b$, ou $D2$ est l'axiome du langage $D2$. On a aussi que un mot de $D2$ non vide se décompose comme un mot de $D2$ non vide, suivit par un mot de $D2$. un mot de D3 est soit un mot vide, soit un mot non vide : $D1- > aD2bD1|bD3aD1|epsilon; D2- > aD2bD2|epsilon; D3- > bD3aD3|epsilon$