La fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive

Benjamin Hellouin

Définition 1. *La fonction d'Ackermann* $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *est définie par :*

$$A(x,y) = \begin{cases} y+1 & si\ x = 0 \\ A(x-1,1) & si\ x \neq 0, y = 0 \\ A(x-1, A(x, y-1)) & si\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

Par exemple, $A(1,y) = y+1$ *et* $A(2,y) = 2y+3$

Lemme 1. *Pour* $x, y \in \mathbb{N}$*, la fonction d'Ackermann vérifie les propriétés suivantes :*
- $x + y < A(x,y) < A(x, y+1)$
- $\forall k \in \mathbb{N}, A(x, y+k) \leq A(x+k, y)$

Preuve. Pour le premier résultat, on fait une récurrence sur x. Le cas de base est évident. On suppose le résultat vrai pour un certain $x \in \mathbb{N}$, et on prouve par récurrence sur y que le résultat est vrai pour $x+1$.

Cas de base : $A(x,0) = A(x-1,1) > x$ et

$$A(x+1,0) = A(x,1) < A(x, A(x+1,0)) = A(x+1,1)$$

par HDR.

Hérédité : supposons le résultat vrai pour un certain $y \in \mathbb{N}$. Alors

$$A(x+1,y+1) = A(x, A(x+1,y)) < A(x, A(x+1,y+1)) = A(x+1,y+2).$$

Comme $A(x,0) > x$ par récurrence et que la fonction est strictement croissante à droite, l'autre résultat s'ensuit.

Pour le deuxième résultat, on fait une récurrence sur k. Le cas de base étant évident, supposons que le résultat soit vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Si $y = 0$, $A(x+k+1,0) = A(x+k,1) \geq A(x,k+1)$. Sinon, $y + k < A(x+1, y+k-1)$ implique

$$A(x, y+k+1) \leq A(x, A(x+1, y+k-1)) = A(x+1, y+k) \leq A(x+k+1, y)$$

par hypothèse de récurrence.

Corollaire 1. *Pour tout* $y \in \mathbb{N}$*, la fonction* $x \to A(x,y)$ *est strictement croissante.*

Lemme 2. *Soit* $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$*.*
- $\exists x, \forall y, A(x_1, A(x_2, y)) \leq A(x,y)$ *;*
- $\exists x, \forall y, A(x_1, y) + A(x_2, y) \leq A(x,y)$*.*

Preuve. Soit $x_0 = \sup(x_1, x_2)$. Si $y = 0$, on a

$$A(x_0, A(x_0, 0)) \leq A(x_0, A(x_0 + 1, 0)) = A(x_0 + 1, 1) = A(x_0 + 2, 0)$$

Sinon,

$$\forall y, A(x_1, A(x_2, y)) \leq A(x_0, A(x_0, y)) \leq A(x_0, A(x_0 + 1, y - 1)) \leq A(x_0 + 1, y)$$

Donc $x = x_0 + 2$ convient. Par ailleurs,

$$A(x_1, y) + A(x_2, y) \leq 2A(x_0, y) \leq A(2, A(x_0, y)) \leq A(x, y)$$

où $x = \sup(2, x_0) + 2$.

Définition 2. *Soit $f : \mathbb{N}^p \mapsto \mathbb{N}$. On dit qu'elle est M-lente si*

$$\forall (n_1 \dots n_p) \in \mathbb{N}^p, f(n_1 \dots n_p) \leq A(M, n_1 + \dots + n_p)$$

Lemme 3. *Toute fonction primitive récursive $\mathbb{N}^p \mapsto \mathbb{N}$ est M-lente pour un certain $M \in \mathbb{N}$.*

Preuve par induction. Les fonctions de base sont 1-lentes. Pour la composition, soit $f(x_1 \dots x_k) = g(h_1(x_1 \dots x_k) \dots h_n(x_1 \dots x_k))$, avec g M_g-lente et les h_i M_i-lentes. Alors

$$f(x_1 \dots x_k) \leq A(M_g, h_1(x_1 \dots x_k) + \dots + h_n(x_1 \dots x_k))$$

$$\leq A(M_g, A(M_1, (x_1 + \dots + x_k)) + \dots + A(M_n, x_1 + \dots + x_k)).$$

et on conclut par le lemme précédent.

Pour la récursion primitive, soit $f(y, x_1 \dots x_k) = rec(g, h)$ avec g M_g-lente et h M_h-lente. Posons $M = \sup(M_g, M_h) + 3$ et prouvons par récurrence que f est M-lente. Le cas de base est évident, supposons le résultat vrai pour un certain y :

$$f(y + 1, x_1 \dots x_k) = h(y + 1, x_1 \dots x_k, f(y, x_1 \dots x_k))$$

$$\leq A(M_h, x_1 + \dots + x_k + A(M, y, x_1 \dots x_k)) \leq A(M_h, 2A(M, y + x_1 \dots x_k))$$

$$\leq A(M - 1, A(M, y + x_1 \dots x_k)) \leq A(M, y + 1 + x_1 \dots x_k)$$

Corollaire 2. *La fonction d'Ackermann n'est pas primitive récursive*

Preuve. $x \to A(x, x)$ ne peut pas être M-lente, car $A(M + 1, M + 1) > A(M, M + 1)$.