Algorithme de Robinson

Benjamin Hellouin

Baader, “Unification by transformation”

Théorème 1. *L'algorithme termine sur toutes les entrées, quels que soient les choix non déterministes.*

Preuve. On dit qu'une variable x est résolue si elle n'apparait qu'une fois dans le système, dans une équation $x \sim t$ avec $x \notin Var(t)$. On associe à chaque système un triplet $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ défini comme suit :
- n_1 = nombre de variables non résolues dans S ;
- $n_2 = \sum_{s \sim t \in S} |s| + |t|$;
- n_3 = nombre d'équations de la forme $t \sim x, x \in Var$.

On prouve que chaque opération fait décroître strictement le triplet associé au système pour l'ordre lexicographique.

Élimination fait décroître n_2 sans modifier n_1 ;

Décomposition fait décroître n_2 (un f enlevé) sans modifier n_1 ;

Orientation l'équation n'est a priori pas résolue, mais n_3 diminue strictement ;

Propagation la variable x est résolue sans modifier les autres variables résolues : n_1 decroît strictement.

Théorème 2. *L'algorithme ne modifie pas l'ensemble des unificateurs du système.*

Preuve. Pour les trois premières opérations, c'est évident. Pour la propagation, soit σ un unificateur de $\{x \sim t\} \cup S$ et $\theta = [x \leftarrow t]$.Alors

$$\sigma x = \sigma t \wedge \sigma \text{ est un unificateur de } S \tag{1}$$
$$\sigma x = \sigma t \wedge \sigma\theta \text{ est un unificateur de } S \tag{2}$$
$$\sigma x = \sigma t \wedge \sigma \text{ est un unificateur de } \theta S \tag{3}$$
$$\sigma \text{ est un unificateur de } \{x \sim t\} \cup \theta S. \tag{4}$$

Théorème 3. *Pour conclure, il ne reste qu'à montrer qu'une forme normale d'un problème résoluble est sous forme résolue.*

Pour cela, on considère les équations susceptibles d'apparaître dans un problème en forme normale.

$\mathbf{x} \sim \mathbf{t}$:
- $x \sim x$: impossible par élimination ;
- $x \sim t, x \in Var(t), t \neq x$;
- $x \sim t, x \notin Var(t)$.

$\mathbf{f}(\mathbf{u}) \sim \mathbf{t}$:
- $f(u) \sim x$: impossible par orientation ;

- $f(u) \sim f(v)$: impossible par décomposition ;
- $f(u) \sim g(v)$.

Si les cas 2 et 6 apparaissent, le système n'a pas de solution :
cas 2 : $t = f(t')$ et x apparaît dans t', donc $|\sigma x| < |\sigma t|$.
cas 6 : $\sigma f(u) = f(\sigma u) \neq g(\sigma v) = \sigma g(v)$.

Donc, si le problème est résoluble, alors tout forme normale est sous forme résolue. On peut en déduire facilement un mgu idempotent.