Problème du voyageur de commerce : cas métrique

Benjamin Hellouin

Définition 1 (Le problème du voyageur de commerce (PVC)).
Entrée : un graphe complet, pondéré par une fonction de poids w.
Sortie : un cycle hamiltonien de poids minimal.

On peut prouver, par réduction au problème de trouver un cycle hamiltonien, que toute ρ-approximation du PVC est NP-complète ($\rho \geq 1$). On s'intéresse ici au cas particulier où la fonction de poids est métrique, autrement dit, au cas où elle vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall x, y, z \in V, w(x, y) + w(y, z) \geq w(x, z)$$

Théorème 1. *Le problème du voyageur de commerce dans le cas métrique (PVC-métrique) est NP-complet.*

On réduit ce problème au cas général du voyageur de commerce. Soit (G, w) une instance de PVC : alors, on pose $\alpha = \max\{w(x,z) - w(x,y) - w(y,z) \mid x, y, z \in V^3\}$. Si $\alpha \leq 0$, on est dans le cas métrique ; autrement, on définit $w' = w + \alpha$, et on remarque que w' est métrique et que tout cycle hamiltonien minimal de G pour w l'est pour w'. On en déduit que PVC $\leq_T$ PVC-métrique.

Théorème 2. *PVC-métrique est 2-approximable en temps polynômial, autrement dit, il existe un algorithme en temps polynômial qui renvoie un cycle hamiltonien moins de deux fois plus long qu'un cycle minimal.*

On remarque que tout cycle hamiltonien privé d'une de ses arêtes forme un arbre couvrant. Si on note C_{min} un cycle hamiltonien minimal et A_{min} un arbre couvrant minimal, on a donc $w(A_{min}) \leq w(C_{min})$.

Tout d'abord, on utilise l'algorithme de Prim pour obtenir un arbre couvrant minimal. On le transforme en marche hamiltonienne (cycle hamiltonien où plusieurs passages sur la même arête sont autorisés) de la manière suivante : On choisit arbitrairement une racine r de l'arbre. Soit $(r, s_1) \ldots (r, s_n)$ les arêtes de l'arbre qui lui sont adjacentes et $A_1 \ldots A_n$ les sous-arbres correspondants. Alors on construit récursivement la marche hamiltonienne suivante :

$$M(A, r) = rM(A_1, s_1)r \ldots rM(A_n, s_n)r$$

et on vérifie facilement que $w(M(A, r)) \leq 2w(A_{min})$.

Théorème 3. *Si w est métrique, on peut à partir de toute marche hamiltonienne construire un cycle hamiltonien de poids inférieur.*

Soit $M = x_1 \dots x_n x_1$ une marche hamiltonienne, et soit x_i un sommet apparaissant deux fois dans la marche. Alors on remarque que $M' = x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_1$ est de poids inférieur, vu que $w(x_{i-1}, x_{i+1}) \leq w(x_{i-1}, x_i) + w(x_i, x_{i+1})$ par hypothèse. En itérant cette opération, on obtient bien un cycle hamiltonien C vérifiant : $w(C) \leq w(M)$.

Il suffit à présent d'appliquer cette opération à la marche $M(A, r)$ pour obtenir un cycle $C(A, r)$ vérifiant :

$$w(C(A, r)) \leq w(M(A, r)) \leq 2w(A_{min}) \leq w(C_{min})$$

et l'algorithme est donc bien une 2-approximation.