# Théorème de Banach-Steinhaus et conséquences

Benjamin Hellouin

FGN algèbre 1

**Théorème 1** (de Banach-Steinhaus). *Soit $(f)_{f\in I}$ une famille d'applications linéaires $E \to F$, où $E$ est un espace de Banach. Si la famille $(|||f|||)_{f\in I}$ n'est pas bornée, alors il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f\in I} ||f(x)|| = +\infty$.*

*Preuve.* On pose $\Omega_k = \{x \in E : \sup_{f\in I} ||f(x)|| \geq k\}$. Il s'agit d'un ouvert : si $x \in \Omega_k$, il existe $f \in I$ telle que $||f(x)|| > k$. $f$ étant continue, il existe $r > 0$ tel que $x_0 \in B(x,r) \Rightarrow ||f(x)|| > k$.

Si chaque $\Omega_k$ est dense dans $E$, $E$ étant complet, le théorème de Baire implique que $\cup_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k$ est dense dans $E$. En particulier, il est non vide et $x \in \cup_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k$ vérifie $\sup_{f\in I} ||f(x)|| = +\infty$. Supposons qu'au contraire un des $\Omega_k$ ne soit pas dense. En d'autres termes,

$$\exists x_0, \exists r > 0, B(x_0, r) \cup \Omega_k = \emptyset.$$

$$\forall x \in B(0,r), \forall f \in I, ||f(x)|| = ||f(x + x_0) - f(x_0)|| \leq 2k$$

et par continuité, cette inégalité reste vraie sur la boule fermée. En se ramenant à la boule unité, on voit facilement que $|||f||| \leq \frac{2k}{r}$, ce qui implique le résultat.

**Corollaire 1.** *Une limite simple d'applications linéaires continues est linéaire (évident) continue.*

**Corollaire 2.** *Il existe une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier diverge en 0.*

*Preuve.* L'application $l_n$ : $\begin{array}{c} C_{2\pi} \to \mathbb{C} \\ f \mapsto \sum_{-n}^{n} c_k(f) \end{array}$. $l_n$ est clairement une forme linéaire. En groupant les termes deux à deux, on a

$$\sum_{-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int}\frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(2n+1)t/2} - e^{-i(2n+1)t/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

Donc $l_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} f(t)dt$ et, si $||f||_\infty = 1$, on a $|l_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right| dt$. Cette borne n'est pas atteinte, mais les fonctions $f_\varepsilon : t \mapsto \frac{D_n(t)}{D_n(t)+\varepsilon}$ où $D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$ l'approchent : on a $||f_\varepsilon||_\infty \leq 1$ et $l_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)|+\varepsilon}dt \underset{\varepsilon\to\infty}{\longrightarrow} l$.

Par conséquent, on a $|||l_n||| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right| dt \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin((2n+1)t/2)}{t/2}\right| dt$ par parité, et car $|\sin u| \leq |u|$, soit $|||l_n||| \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi/2} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du$ (ne pas se planter dans le changement de variable). Or cette dernière intégrale est divergente, car $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin u/u| du \geq \frac{1}{n} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin u| du = \frac{2}{n}$. On en déduit que $\lim_{n\to\infty} |||l_n||| = +\infty$.

$C_{2\pi}$ est complet comme fermé de $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (fonctions bornées) qui est complet. Le théorème de Banach-Steinhaus entraîne l'existence d'une fonction continue $f$ telle que $\sup |l_n(f)| = +\infty$, autrement dit dont la série de Fourier diverge en 0. En particulier, une telle fonction est distincte de sa série de Fourier.