Boules unité

Benjamin Hellouin

Rouvière, chap.1, “Jauge”

Théorème 1. *Soit E un ev de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des boules unités (pour les normes sur E) sont exactement l'ensemble des voisinages de 0 compacts, convexes, symétriques par rapport à 0.*

NB : voisinage = contient 0 dans l'intérieur.

Sens direct. Soit $||.||$ une norme sur E et $\mathcal{B}$ la boule unité associée. Alors elle est symétrique car $||x|| = ||-x||$, convexe grâce à l'inégalité triangulaire

$$||\lambda x + \mu y|| \leq \lambda + \mu = 1$$

et voisinage de 0 car $||.||$ est continue et 0 est dans la pré-image de $]-\infty, 0[$, ouverte. Enfin, B est fermée pour la même raison. Enfin, elle est bornée (pour toute norme) puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, et elle est donc compacte (dimension finie).

Sens réciproque. Soit K un ensemble satisfaisant aux conditions de l'énoncé. On introduit sa *jauge* :

$$j_K(x) = \inf I(x), \text{ où } I(x) = \{\lambda > 0, x \in \lambda K\}.$$

On va montrer que j_k est bien définie et est une norme sur E, et que K est sa boule unité.

Bonne définition : comme K est un voisinage de 0, il contient une boule $B(0,r)$. Donc $I(x)$ contient les réels $\geq ||x||/r$, et $j_k(x)$ est bien définie. $I(x)$ est l'image réciproque de K fermé par l'application continue $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}x$ (de $]0,+\infty[$ dans E), donc il est fermé (dans $]0,+\infty[$!). Enfin, comme K est convexe et contient 0, $I(x)$ est une demi-droite : si $\lambda \in I(x)$ et $\mu \geq \lambda$, alors $\frac{1}{\lambda}x$ et 0 appartiennent à K et de même pour $\frac{1}{\mu}x$ comme barycentre des deux précédents. On a donc deux cas possibles :

- $I(x) = [j_K(x), +\infty[$;
- $I(x) =]0, +\infty[$ avec $j_k(x) = 0$.

Dans chaque cas, $x \in K \Leftrightarrow 1 \in I(x) \Leftrightarrow j_K(x) \leq 1$: il ne reste donc plus qu'à prouver que j_K est une norme.

Pour $\alpha > 0$, $x \in \lambda K \Leftrightarrow \alpha x \in \alpha\lambda K$, donc $I(\alpha x) = \alpha I(x)$ et $j_K(\alpha x) = \alpha j_K(x)$. Si $\alpha < 0$, on a $j_K(\alpha x) = |\alpha| j_K(x)$ par symétrie de K. Enfin, $j_K(0) = 0$ car $I(0) =]0, +\infty[$: supposons que $j_K(x) = 0$ et prouvons le sens réciproque. Comme K est compact, la fonction $x \to ||x||$ (norme quelconque), continue sur

K, y est bornée, donc K est contenu dans la boule $B(0,R)$ de cette norme. Comme $j_K(x)=0$, on a $I(x)=]0,+\infty[$, i.e.

- $\forall \lambda > 0, x \in \lambda K$;
- $\forall \lambda > 0, \frac{1}{\lambda}||x|| \leq R$
- $||x|| = 0$

Enfin, $x=0$. Il ne reste que l'inégalité triangulaire, que l'on démontre à partir du fait que $K=\{x : j_K(x) \leq 1\}$. Pour $x, y \neq 0$, on pose $z = x+y$ et on a

$$\frac{z}{||x||+||y||} = \left(\frac{||x||}{||x||+||y||}\right)\frac{x}{||x||} + \left(\frac{||y||}{||x||+||y||}\right)\frac{y}{||y||}.$$

Autrement dit, $\frac{z}{||x||+||y||}$ est un barycentre de deux points de la boule unité, et par convexité $||z|| \leq ||x+y||$, ce qui est exactement l'inégalité triangulaire.