Calcul de $\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x} dx$.

Benjamin Hellouin

Gourdon, Intégration, prob.4
FGN analyse 2 (détails)

L'intégrale n'offre pas de primitive exprimable avec des fonctions usuelles. L'idée est de considérer l'intégrale à paramètre $F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x} dx$, de la dériver et de remarquer qu'on se ramène ainsi à une intégrale calculable.

La fonction $f : (a,x) \mapsto \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ est continue sur $]-1,+\infty[\times[0,\frac{\pi}{2}[$ et elle est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$; en effet, au voisinage de ce point, on a $\log(1+a\cos x) = a\cos x + o(\cos x)$ et $f(x) = a + o(1)$. Ainsi prolongée, f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = \frac{\cos x}{\cos x} \frac{1}{\log 1 + a \cos x}$ qui est continue sur $]-1,+\infty[\times[0,\frac{\pi}{2}[$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale :

$$\forall a > -1, F \text{ est dérivable et } F'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+a\cos x)} dx.$$

Il s'agit d'une fraction rationnelle en cos et en sin : on effectue le changement de variables $t = \tan(x/2)$. On a $dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$ (dérivation d'arctan) et

$$\cos x = (\cos x/2)^2 - (\sin x/2)^2 = \frac{(\cos x/2)^2 - (\sin x/2)^2}{(\cos x/2)^2 + (\sin x/2)^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Donc $F'(a) = \int_0^1 \frac{2}{(1+t^2+a(1-t^2))} dt$. On va maintenant considérer $a \in]-1,1[$ pour conclure par continuité.

Posons $a = \cos\theta$ pour $\theta \in]0,\pi/2[$. On a $\frac{2}{(1+t^2+\cos\theta(1-t^2))} = \frac{2}{t^2(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)} = \frac{2}{t^2\sin(\theta/2)^2+\cos(\theta/2)^2}$, et

$$F'(a) = \frac{1}{\cos^2(\theta/2)} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2\tan^2(\theta/2)} = \frac{1}{\cos^2(\theta/2)\tan(\theta/2)} \int_0^{\tan\theta} \frac{du}{1+u^2}$$
$$= \frac{2}{\sin 2\theta} [\arctan u]_0^{\tan\theta} = \frac{2\theta}{\sin 2\theta}.$$

Finalement, $\forall a \in]-1,1[, F'(a) = \frac{\arccos a}{\sqrt{1-a^2}}$.

On en déduit donc

$$F(a) = F(0) + \int_0^a F'(x)dx = \left[-\frac{(\arccos x)^2}{2}\right]_0^a = 0 - \frac{(\arccos a)^2}{2} + \frac{\pi^2}{8}.$$

F étant continue en $a = 1$, on en déduit $F(1) = \lim_{a\to 1^-} F(a) = \frac{\pi^2}{8}$, ce qui est le résultat rehcerché.