Décomposition polaire et points extrémaux de $B(0,1)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Benjamin Hellouin

FGN algèbre 3 (trois morceaux)

Théorème 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple (S, O) constitué d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique positive tel que $A = OS$.*

Lemme 1. *Soit $A \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple (S, O) constitué d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique définie positive tel que $A = OS$.*

Preuve du lemme.
Existence : A étant inversible, ${}^tAA$ est définie positive et elle admet une base de vecteurs orthonormés $(e_1 \dots e_n)$ associés aux valeurs propres $(\lambda_1 \dots \lambda_n) > 0$. En posant $S = \sqrt{\lambda_i} Id$ sur chaque espace propre E_{λ_i} on définit une matrice symétrique telle que $S^2 = {}^tAA$. Alors $O = AS^{-1}$ est orthogonale :

$$ {}^tOO = {}^tS^{-1t}AAS^{-1} = Id. $$

Unicité : Soit un autre couple (O', S') satisfaisant aux conditions. Alors ${}^tAA = {}^tS'^tOOS' = S'^2$. Donc S' commute avec ${}^tAA$ et elle stabilise ses espaces propres E_{λ_i}. Sur cet espace, les seules valeurs propres possibles de S' sont $\sqrt{\lambda_i}$, mais comme elle est diagonalisable, elle vaut $\sqrt{\lambda_i} Id$.

Preuve du théorème. $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour le voir, on peut poser $M + \frac{1}{n} Id$ pour M non inversible). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(A_i) \in GL_n^{\mathbb{N}}$ une suite tendant vers M. Notons (O_i, S_i) les décompositions polaires respectives des A_i. Or O_i est une suite de O_n, qui est compact : il est évidemment borné et c'est l'image réciproque de $\{Id\}$ par la fonction $M \mapsto {}^tMM$. On peut donc en extraire une suite $(O_{\varphi(n)})$ convergeant vers une matrice orthogonale O. Mais alors $S_{\varphi(n)}$ converge également vers une limite S qui est symétrique par passage à la limite. De plus, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$ 0 \leq {}^tS_{\varphi(n)} X S_{\varphi(n)} \to {}^tSXS $$

donc S est positive.

Corollaire 1. *Soit $\mathcal{L}(E)$ muni de la norme d'opérateur $|||\cdot|||$. Les points extrémaux de la boule unité (i.e tels que $B - \{u\}$ est convexe) sont exactement les éléments de $O(E)$.*

Preuve. Soit $u \in O(E)$ et supposons, par exemple, que $u = \frac{1}{2}(v + w)$. Soit x unitaire. On a

$$ 1 = ||u(x)|| \leq \frac{1}{2}(||v(x)|| + ||w(x)||) \leq \frac{1}{2}(|||v||| + |||w|||) \leq 1 $$

et toutes ces inégalités sont des égalités. Donc $u(x)$ et $v(x)$ sont positivement liés (inégalité triangulaire) et $||v(x)|| = ||u(x)|| = 1$, d'où $u(x) = v(x)$ sur tout vecteur unitaire et finalement $u = v = w$.

Inversement, soit $u \in B(0,1)$. On va travailler matriciellement en considérant sa matrice A dans une base orthonormée et sa décomposition polaire $A = SO$. On a $S = {}^tPDiag(\lambda_1 \ldots \lambda_n)P$ où on suppose $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq 1$ (puisque $|||S||| = |||A||| \leq 1$). Supposons que $d_1 \neq 1$ (autrement dit, $u \notin O(E)$) : on peut écrire $\lambda_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ avec $-1 \leq \alpha < d_1 < \beta \leq 1$. Alors ${}^tPDiag(\alpha \ldots \lambda_n)PO$ et ${}^tPDiag(\beta \ldots \lambda_n)PO$ sont deux matrices de norme ≤ 1 (valeurs propres comprises entre 1 et -1 fois matrice orthogonale), distinctes de A, telles que A est contenu dans leur segment.