Algorithme pour la décomposition de Dunford

Benjamin Hellouin

Risler-Boyer, chap.3, prob 3.1

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(K)$: on cherche à calculer sa décomposition de Dunford sans calculer ses valeurs propres (ce qui ne peut souvent se faire que de manière approchée). Son polynôme χ_A se décompose sous la forme $\prod_i (x - \lambda_i)^{n_i}$ et on cherche à calculer $P(X) = \prod_i (X - \lambda_i)$. Ceci se fait par la formule

$$P(X) = \frac{\chi_A(X)}{\chi_A(X) \wedge \chi'_A(X)} \quad \text{(par l'algorithme de division euclidienne)}$$

qui prouve également que $P \in K[X]$.

Pour trouver la partie diagonalisable de la décomposition, on va chercher une racine (matricielle) de P avec la méthode de Newton, en considérant la suite $A_0 = A, A_{n+1} = A_n - P(A_n)(P'(A_n))^{-1}$. On va prouver que cette suite est bien définie et est stationnaire.

Lemme 1. *Soit U et N deux matrices resp. inversible et nilpotente, commutant entre elles. Alors $U - N$ est inversible. En particulier, $P'(A)$ est inversible et son inverse commute avec A.*

Preuve du lemme. On applique la relation $(1-x) = (1+x+\dots x^k) = 1-x^{k+1}$ à $x = U^{-1}N$ et on obtient $(U - N)(U^{-1} + U^{-2}N + \cdots + U^{-k-1}N^k) = I_n$ pour k assez grand (tel que $N^{k+1} = 0$). $U - N$ est donc inversible.

Pour obtenir le second résultat, on remarque que P et P' sont premiers entre eux. Le théorème de Bezout donne U et V tels que $UP + VP' = 1$. En l'appliquant à A, on en tire $VP'(A) = I_n - UP(A)$, et $P(A)$ est nilpotent par le théorème de Cayley-Hamilton. Le théorème applique à $U = I_n$ et $N = UP(a)$ indique que $P'(A)$ est inversible et commute avec A (c'est un polynôme en A).

On vient de montrer que $P'(A)$ est inversible. On va montrer par récurrence que $P'(A_n)$ est inversible. Le résultat précédent montre aussi que les A_n sont des polynômes en A.

Lemme 2. $\forall Q \in K[X], \exists \tilde{Q} \in K[X,Y]$ *tel que* $Q(X+Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2\tilde{Q}(X,Y)$.

Preuve du lemme. Il suffit de le prouver sur les monômes ; or $(X+Y)^m = X^m + mYX^{m-1} + Y^2 \sum_{k=0}^{m-2} C_k^m X^k Y^{m-k-2}$.

On montre maintenant par récurrence que $P'(A_n)$ est inversible et que $P(A_n)$ s'écrit sous la forme $P(A)^{2^n} B_n$ où B_n est un polynôme en A. C'est trivialement vrai pour $n = 0$; on suppose le résultat vrai jusqu'au rang n. On écrit $P(A_{k+1}) = P(A_k + Y)$ (avec Y correspondant à la définition) $= P(A_k) + YP'(A_k) + Y^2\tilde{Q}(A_k, Y) = Y^2\tilde{Q}(A_k, Y)$ par définition. En écrivant la définition de Y, on a bien l'expression voulue.

Montrons l'inversibilité : la formule de Taylor sur P' donne $P'(A_{n+1}) = P'(A_n) + (A_{n+1} - A_n)Q(A_n)$ où $Q \in K[X]$. Or $A_{n+1} - A_n = P(A_n)(P'(A_n))^{-1}$, et $P(A_n)$ est nilpotente par la question précédente. Donc $P'(A_{n+1}) = U + N$ et ces matrices commutent en tant que polynômes en A, donc $P'(A_{n+1})$ est inversible.

Conclusion : la suite est stationnaire (puisque $P(A)^{2^n}$ stationne en 0, et la suite est constante à ce moment). La limite D est un polynôme en A vérifiant $P(D) = 0$, donc diagonalisable (polynôme annulateur scindé à racines simples). De plus, pour n assez grand, on a $A - D = \sum_{i=0}^{n-1}(A_i - A_{i+1})$ somme de matrices nilpotentes commutant entre elles, donc nilpotentes. D et N commutent alors entre elles en tant que polynômes en A.