Ellipsoïde de John-Loewner

Benjamin Hellouin

FGN algèbre 3

Définition 1. *L'*ellipsoïde *défini par $q \in Q^{++}(\mathbb{R})$ est la boule unité associée à son produit scalaire, c'est-à-dire $\{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leq 1\}$. On le note $\mathcal{E}_q$.*

Théorème 1. *Soit K un compact d'intérieur vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K.*

On munit $\mathbb{R}$ de sa structure euclidienne usuelle et on calcule le volume de $\mathcal{E}_q$. Soit $(e_1 \dots e_n)$ une base orthonormale pour q, de telle sorte que $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ (décomposition en carrés). On a alors :

$$vol(\mathcal{E}_S) = \int \dots \int_{a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int \dots \int_{t_1^2 + \dots + t_n^2 \leq 1} \frac{dt_1 \dots dt_n}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} \text{ avec le changement de variables } x_i = \frac{t_i}{a_i}$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{\det S}} \text{ où } V_0 \text{ est le volume de la boule unité dans } \mathbb{R}^n \text{ et } S = Mat\ q.$$

Existence : on cherche à minimiser cette fonction dans l'espace $\mathcal{A} = \{q \in Q^{++} \mid \forall x \in K, q(x) \leq 1\}$, dont on va montrer qu'il s'agit d'un compact. Comme det est une fonction continue, cela suffira à prouver l'existence d'un ellipsoïde de volume minimum.

$\mathcal{A}$ est fermé : si $q_n \to q$, on a pour tout $x \in K$ $|q_n(x) - q(x)| \leq ||q_n - q|| \cdot ||x||$, donc $q_n(x) \to q(x)$. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) = \lim q_n(x) \geq 0 \quad \text{ et } \quad \forall x \in K, q(x) = \lim q_n(x) \leq 1$$

donc $q \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est borné : comme K est d'intérieur non vide, il contient une boule $B(a, r)$. Alors, si $||x|| \leq r$, on a $\sqrt{q(x)} \leq \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$, soit $q(x) \leq 4$. Pour $||x|| \leq 1$, on a $q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx)$, soit $||q|| \leq \frac{4}{r^2}$.

Ceci suffit à montrer que $\mathcal{A}$ est compact, puisqu'on est en dimension finie. De plus $\mathcal{A}$ est non vide : comme K est borné, il est contenu dans une boule $B(0, M)$. Alors $q : x \mapsto \frac{||x||^2}{M^2} \in \mathcal{A}$.

Unicité : pour garantir l'unicité, on va montrer que l'espace $S^{++}(\mathbb{R}^n)$ est convexe et que la fonction $f : S \to \frac{1}{\sqrt{detS}}$ est strictement convexe. Soit $S, R \in$

S^{++}. Il est possible de les diagonaliser simultanément, soit $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}^n), S = {}^tPDiag(s_i)P$ et $R = {}^tPDiag(r_i)P$, et on a alors $tR + (1-t)S = {}^tPDiag(tr_i + (1-t)s_i)P \in S^{++}$.

$$f(tR + (1-t)S) = \frac{1}{|\det P|}\left(\prod_i tr_i + (1-t)s_i\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{|\det P|}\left(\prod_i e^{-\frac{1}{2}ln(tr_i+(1-t)s_i)}\right)$$

$$\leq \frac{1}{|\det P|}\left(\prod_i e^{-\frac{1}{2}(tln(r_i)+(1-t)ln(s_i))}\right) \text{ par concavité du logarithme}$$

$$= \frac{1}{|\det P|}\left(e^{-\frac{1}{2}\sum_i(tln(r_i)+(1-t)ln(s_i))}\right)$$

$$= \frac{1}{|\det P|}\left(e^{-\frac{1}{2}(tln(\prod_i r_i)+(1-t)ln(\prod_i s_i))}\right)$$

$$< \frac{1}{|\det P|}\left(t\prod_i e^{-\frac{1}{2}ln(r_i)} + (1-t)\prod_i e^{-\frac{1}{2}ln(s_i)}\right) \text{par stricte convexité de l'exponentielle}$$

$$= tf(R) + (1-t)f(S)$$

donc f est strictement convexe. On en déduit que le minimum est unique, ce qui permet de conclure au résutat annoncé.