# Endomorphismes stabilisant le groupe linéaire

Benjamin Hellouin

FGN algèbre 1

On cherche à caractériser les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui stabilisent $GL_n(\mathbb{C})$. Les endomorphismes stabilisant le rang sont des exemples de tels endomorphismes (i.e. de la forme $A \mapsto PAQ$ ou $A \mapsto P^tAQ$). On va montrer que c'est une équivalence :

**Théorème 1.** *Soit $\varphi \in End(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\varphi(GL_n(\mathbb{C})) \subseteq GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), rg\ \varphi(M) = rg(M)$.*

**Lemme 1.** *Si $\varphi(M) \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $M \in GL_n(\mathbb{C})$.*

*Preuve du lemme.* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec rg $M = r < n$ : on cherche à montrer qu'il existe une droite affine dirigée par $M$ incluse dans $GL_n(\mathbb{C})$. $M$ peut s'écrire $AK_rB$ avec $K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A, B$ inversibles. Par conséquent, $B^{-1}A^{-1}M = B^{-1}K_rB$ est nilpotente (semblable à une matrice nilpotente). Par conséquent, la seule valeur propre de $B^{-1}A^{-1}M$ est 0, donc $I - \lambda B^{-1}A^{-1}M$ est inversible pour tout $\lambda$. La droite $AB - \lambda M$ convient.

Ainsi, on a $\varphi(AB - \lambda M) = \varphi(AB) - \lambda\varphi(M)$ inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. $AB$ étant elle-même inversible, on a $I - \lambda\varphi(M)\varphi(AB)^{-1}$ inversible pour tout $\lambda$. La seule valeur propre de $\varphi(M)\varphi(AB)^{-1}$ est donc 0, et il s'agit d'une matrice nilpotente, donc $\varphi(M)$ est nilpotente.

*Preuve du théorème.* On va montrer, avec une méthode similaire à la preuve du lemme, que rg $\varphi(M) \geq$ rg $M$. Pour cela, on va montrer qu'il existe une droite affine dirigée par $M$ incluse dans $GL_n(\mathbb{C})$ sauf en $r$ points exactement. On écrit $M = AJ_rB$ avec $GL_n(\mathbb{C})$. $M$ peut s'écrire $AJ_rB$ avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A, B$ inversibles. Posons $D = Diag(1, 2 \dots n)$ et $Q = ADB$. Alors $Q - \lambda M = A(D - \lambda J_r)B$ est inversible si et seulement si $\lambda = 1, \dots, r$.

Ainsi, $\varphi(Q - \lambda M) = \varphi(Q) - \lambda\varphi(M)$ est non inversible pour exactement $r$ valeurs ($\neq 0$) de $\lambda$. Il en va de même de $I - \lambda\varphi(M)\varphi(Q)^{-1}$, et donc $\varphi(M)\varphi(Q)^{-1}$ a exactement $r$ valeurs propres non nulles distinctes : elle est de rang $\geq r$, et $\varphi(M)$ a même rang que $\varphi(M)\varphi(Q)^{-1}$.

Conséquence : $\varphi$ est injective. En effet, si $\varphi(M) = \varphi(M)$, alors $\varphi(M' - M) = 0$ et donc $M' - M$ est de rang 0. Par conséquent, $\varphi$ est un automorphisme, et le lemme montre que $\varphi^{-1}$ stabilise le groupe linéaire. On a alors pour tout $M$ : rg $M =$ rg $\varphi^{-1}\varphi(M) \geq$ rg $\varphi(M)$.

**Corollaire 1.** *Les endomorphismes stabilisant le déterminant sont de la forme* $A \mapsto PAQ$ *ou* $A \mapsto P^t AQ$ *avec* $\det P \cdot \det Q = 1$.
*Les endomorphsmes stabilisant le polynôme caractéristique sont de la forme ?.*