Familles libres d'applications

Benjamin Hellouin

Oraux X/ENS - algèbre I, 6.28

Lemme 1. *Soit K un corps, E un K-ev, $f_1 \dots f_n$ des applications $E \to K$. Il s'agit d'une famille libre si, et seulement si, il existe $(x_1 \dots x_n) \in E^n$ tel que $(f_i(x_j))$ soit inversible.*

Le sens indirect est clair : si la famille est liée, une telle matrice sera toujours de rang $< n$. Inversement, soit $(f_1 \dots f_n)$ une famille libre et F l'espace de dimension n engendré. On définit $e_a \in F^*, a \in K$ par $e_a(f) = f(a)$: on va montrer que $A = (e_a)_{a \in K}$ est une partie génératrice de F^*. Si $f \in A^\circ$, alors $\forall a \in K, f(a) = 0$, soit $f = 0$. Donc $A^\circ = \{0\}$ et Vect $A = ((\text{Vect } A)^\circ)^\perp = \{0\}^\perp = F$, puisque nos calculs se placent en dimension finie.

Par conséquent, on peut trouver $(x_1 \dots x_n) \in E^n$ telle que la sous-famille $(e_{x_1} \dots e_{x_n})$ soit une base de F. On va montrer que cette famille convient. Soit $\lambda_1 \dots \lambda_n$ tels que $\forall j, \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = 0$. Autrement dit, on a $(\sum \lambda_i f_i) \in (e_{x_1} \dots e_{x_n})^\circ = (F^*)^\circ = \{0\}$. Comme la famille (f_i) est libre, on en déduit $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable. Alors la famille $(f_a = x \mapsto f(x + a))_{a \in \mathbb{R}}$ engendre un espace de dimension finie si, et seulement si, f est solution d'une équation différentielle à coefficients constants.*

Soit une telle application f engendrant un espace F de dimension n. Soit $a_1 \dots a_n$ tels que $f_{a_1} \dots f_{a_n}$ forment une base de F, et $(x_1 \dots x_n)$ tels que la matrice $(f_{a_i}(x_j))$ est inversible. Soit $g \in F$: alors les g_a appartiennent aussi à F et on a des $\lambda_i(a)$ tels que $\forall a, g_a = \sum_i \lambda_i(a) f_{a_i}$. En évaluant en chaque x_j, on obtient matriciellement :

$$\begin{pmatrix} g_a(x_1) \\ \vdots \\ g_a(x_n) \end{pmatrix} = {}^t M \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} = {}^t M^{-1} \begin{pmatrix} g_a(x_1) \\ \vdots \\ g_a(x_n) \end{pmatrix}$$

La matrice M étant indépendante de a, on en déduit que les fonctions λ_i sont dérivables. En particulier, on a $g'(x + a) = \sum_i \lambda_i'(a) f_{a_i}(x)$, soit, en $a = 0$, $g'(x) = \sum_i \lambda_i'(0) f_{a_i}(x) \in F$ (la dérivée en x et en a est la même). En itérant ce raisonnement sur $g' \in F$, on voit que $g \in \mathcal{C}^\infty$ et que $\forall k, g^{(k)} \in F$, et ceci est également vrai pour f.

F étant de dimension finie, on peut trouver p tel que $f^{(p)} \in \mathrm{Vect}(f \dots f^{(p-1)})$, autrement dit, f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Réciproquement, si f satisfait une telle équation, alors les f_a également et l'ensemble des solutions est de dimension finie (p), d'où le résultat.