Fonction 91 de MacCarthy

Benjamin Hellouin

Rieg, Mail à Benjamin Hellouin"
mais voir le Gochet

On s'intéresse à la fonction "91" de MacCarthy, définie informellement de la manière suivante :

$$M : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} M^2(n+11) & \text{si } n \leq 100; \\ n-10 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1 Vision "preuve d'algorithme"

On n'a pas encore prouvé qu'il s'agissait d'une fonction totale. Pour être plus formel, on considère M comme une relation sur les couples $((i,n) \Leftrightarrow M^i(n))$ et on pose un prédicat binaire $P_i(a,b) =$"$M(a)$ peut se réecrire en $M^i(b)$".

On va prouver la correction de l'algorithme suivant à l'aide de triplets de Hoare :

Entrée : N : entier ≤ 0
  $\{N \geq 0\}$
  $n \leftarrow N; i \leftarrow 1$
  $\{N \geq 0 \wedge n = N \wedge i = 1\}$
  $\{i \geq 0 \wedge P_i(N,n) \ (= \text{vrai}\,!)\}$
  Tant que $i \neq 0$ **faire**
    $\{i > 0 \wedge P_i(N,n)\}$
    Si $n \leq 100$ **alors**
      $\{i > 0 \wedge n \leq 100 \wedge P_i(N,n)\}$
      $i \leftarrow i+1; n \leftarrow n+11$
      $\{i > 0 \wedge n \leq 111 \wedge P_{i-1}(N,n-11)\}$
    Sinon
      $\{i > 0 \wedge n > 100 \wedge P_i(N,n)\}$
      $i \leftarrow i-1; n \leftarrow n-10$
      $\{i > 0 \wedge n > 90 \wedge P_{i+1}(N,n-10)\}$
    $\{P_i(N,n)\}$
  $\{P_i(N,n) \wedge i = 0\}$
  $\{P_0(N,n)\}$
Sortie : n

Le résultat garantit que, si n est la sortie, $M(N)$ se réecrit en n, ce qui assure la correction de l'algorithme.

Cette preuve ne dit rien sur le résultat effectif ni sur la terminaison du programme, pour laquelle on a besoin d'arguments de récriture. Pour mieux comprendre le fonctionnement de ce système, on étudie l'exemple $n = 98$:

$$(98,1) \to (109,2) \to (99,1) \to (110,2) \to (100,1) \to (111,2) \to (101,1) \to (91,0)$$

On peut trouver intuitivement un ordre adapté pour prouver la terminaison, en associant au terme $M^i(n)$ la valeur $2(110-n)-21i$. En effet :

$$2(110-(n+11))-21(i+1) < 2(110-n)-21i;$$

$$2(110-(n-10))-21(i-1) > 2(110-n)-21i.$$

(le choix de l'ordre lexicographique sur $(110-n-10i, i)$ est aussi possible). Cependant, cette preuve ne donne aucun indice sur le résultat effectif du calcul.

On a déjà l'intuition que la fonction 91 correspond à $M(n) = 91$ si $n \leq 101$, $n-10$ sinon. Le second cas étant évident, on le prouve par récurrence forte sur $\{0, \ldots 101\}$ muni de l'ordre $a \prec b \Leftrightarrow b < a \leq 101$, qui est évidemment bien fondé. *Initialisation :* $M(101) = 91$.

Récurrence : On distingue deux cas. Supposons le résultat vrai pour tout $n > n_0 \geq 91$, et montrons-le pour n_0 : $M(n_0) = M(M(n_0+11))$ car $n_0 + 11 > 100$, soit $= M(n_0+1) = 91$ par hypothèse de récurrence.

Supposons maintenant le résultat vrai pour tout $n > n_0$ avec $n_0 < 91$. Alors $M(n_0) = M(M(n_0+11)) = M(91)$ par hypothèse de récurrence, et $M(91) = 91$.

Notons que la récurrence précédente ne permet pas de trouver un ordre décroissant pour le système de récriture, ni même pour son application répétée (et donc sa vitesse de convergence) bien qu'elle puisse prouver sa terminaison.

2 Vision "récriture"

On veut adopter sur cette fonction un point de vue de système de récriture. Considérons-la comme un système de récriture sur les termes définis par les fonctions M et S (arité 1) et 0 (arité 0). Il est clair que la bonne définition de la fonction est équivalente à la terminaison et la confluence de ce système.

$$S = \begin{cases} MS^{101}(x) \mapsto S^{91}(x) \\ MS^k 0 \mapsto M^2 S^{k+11} 0 \text{ pour } k \leq 100 \end{cases}$$

La terminaison se prouve par l'ordre précédent portant sur les couples (i, n). La confluence provient du fait qu'il n'y a pas de paire critique (on voit bien qu'un des termes est inclus dans la substitution de l'autre). Le système admet donc des formes normales qui peuvent être n'importe quel entier. La récriture ne peut rien nous dire d'autre : pour connaître un résultat plus précis, il faut recourir à d'autres outils : la récurrence.