Fonctions implicites par théorème de point fixe

Benjamin Hellouin

Rouvière, chap. 5

Théorème 1 (des fonctions implicites)**.** *Soit U un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_p$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application C^1 de U dans $\mathbb{R}_p$. On suppose $f(0,0) = 0$ (pour simplifier les notations) et $D_y f(0,0)$ (la jacobienne en 0 par rapport aux variables y) inversible. Alors il existe des voisinages $V \subset U$ et $W \subset \mathbb{R}_p$ et une application C^1 $\varphi : V \to W$ tels que :*

$$x \in V, y \in W, f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \in V \text{ et } y \in \varphi(x).$$

On va utiliser une méthode similaire à la méthode de Newton (cf; dessin du Rouvière). On utilise la suite $F_x(y) = y - A^{-1} f(x,y)$ où $A = D_y f(0,0)$.

Preuve. On a $DF_x(y) = I - A^{-1} D_y f(x,y)$, le secnd membre étant une fonction linéaire continue en (x,y), nulle en $(0,0)$. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir r et s tels que

$$||x|| \leq r, ||y|| \leq s \Rightarrow ||DF_x(y)|| \leq \varepsilon.$$

Sous ces conditions, on a alors $||F_x(y)|| \leq ||F_x(0)|| + ||F_x(y) - F_x(0)|| \leq ||A^{-1} f(x,0)|| + \varepsilon ||y||$ (inégalité de la moyenne). Comme $f(0,0) = 0$, on peut choisir r assez petit pour que le terme de gauche soit $< (1-s)\varepsilon$, soit en tout $||F_x(y)|| \leq s$. Autrement dit, $F_x(\overline{B_s}) \subset B_s$ pour x assez petit.

Comme F_x y est contractante, on peut appliquer le théorème du point fixe dans $\overline{B_s}$ qui est complète : F_x admet dans $\overline{B_s}$ un unique point fixe, qu'on note $\varphi(x)$. Comme $F_x(y) = y \Leftrightarrow f(x,y) = 0$, on a établi que

$$x \in \overline{B_r},\ y \in \overline{B_s} \text{ et } f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{B_r} \text{ et } y = \varphi(x).$$

On peut obtenir des voisinages ouverts en remarquant que $y \in B_s$ puisque $F_x(\overline{B_s}) \subset B_s$, et on peut restreindre à B_r sans conditions. Il reste à montrer que φ est de classe C^1.

On commence par prouver que φ est continue et même lipschitzienne. Posons $y = \varphi(x), y_0 = \varphi(x_0)$.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= (F_x(y) - F_x(y_0)) + (F_x(y_0) - F_{x_0}(y_0)) \\ &= (F_x(y) - F_x(y_0)) + A^{-1}(f(x,y_0) - f(x_0,y_0)). \end{aligned}$$

L'inégalité de la moyenne montre que $||y - y_0|| \leq \varepsilon ||y - y_0|| + M ||A^{-1}|| \cdot ||x - x_0||$, où $M = \max\limits_{||x|| \leq r} ||D_x f(x,y_0)||$, d'où $||y - y_0|| \leq \frac{M||A^{-1}||}{1+\varepsilon} ||x - x_0||$.

On prouve maintenant que φ est différentiable. La différentiabilité de f en (x_0, y_0) permet d'écrire

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0, y_0) - f(x, y) \\ &= D_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_y f(x_0, y_0)(y - y_0) + o((x, y) - (x_0, y_0)) \end{aligned}$$

φ étant lipschitzienne, un $o((x, y) - (x_0, y_0))$ est un $o(x - x_0)$. Par suite, on a

$$D_y f(x_0, y_0)(y - y_0) = -D_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

On a $||I - A^{-1} D_y f(x, y)|| \leq \varepsilon < 1$, donc la somme $\sum (I - A^{-1} D_y f(x, y))^k$ converge absolument, donc converge. On en déduit que $I - (I - A^{-1} D_y f(x, y)) = A^{-1} D_y f(x, y)$ est inversible, d'inverse cette somme, et donc $D_y f(x, y)$ est inversible.

Pour conclure,

$$(y - y_0) = -D_y f(x_0, y_0)^{-1} D_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

ce qui établit la différentiabilité de φ en x_0, et sa différentielle est composée d'applications continues.