Formule sommatoire de Poisson

Benjamin Hellouin

Zuily-Queffélec, chap.4 (clarté)
Gourdon, chap.4 (rédaction)
Willem, chap 6 (cor.)

Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. La manière la plus simple de lui associer une fonction périodique est d'écrire la série formelle

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(x-k)$$

appelée *périodisation* de u. On veut montrer que, sous certaines hypothèses, cette série converge vers une fonction dont les coefficients de Fourier sont exactement les $\hat{u}(k), k \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1. *On suppose que $u(x) = O(1/|x|^2)$ (où on peut remplacer 2 par $\alpha > 1$), et que de même $\hat{u}(x) = O(1/|x|^2)$ (la sommabilité en les entiers suffit). Alors on a*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2ik\pi},$$

les sommes impliquées convergeant absolument et uniformément.

Preuve. On considère $M > 0$ tel que $|u(x)| \leq M|x|^2$ pour $|x| \geq 1$. On a alors

$$\forall x \in [-K, K], |n| > K+1 \Rightarrow |u(x-k)| \leq \frac{M}{(|n|-K)^2}$$

d'où une convergence normale sur tout compact. Si on note P_u la périodisation de u, on a donc en particulier que P_u est continue et 1-périodique (changement d'indice). Le calcul de ses coefficients de Fourier donne :

$$c_n(f) = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(x-k) e^{-2i\pi nx} dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 u(x-k) e^{-2inx} dx$$

par convergence normale sur $[0,1]$, puisque $|e^{-mx}| \leq 1$,

$$c_n(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} u(x) e^{-2inx} dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-2inx} dx = \hat{u}(n).$$

Par hypothèse, on a donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(P_u)$ qui est absolument convergente. Or une fonction continue est limite de sa série de Fourier si celle-ci converge, ce qui donne $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2ik\pi x}$, le résultat recherché. (on peut supposer C^1 pour éviter les emmerdes)

On note en particulier pour $x = 0$ le résultat $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k)$, souvent connu sous le nom de *formule sommatoire de Poisson.*

Corollaire 1. *Soit $a > 0$. On a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a)$.*

Preuve. On considère $f : t \mapsto e^{-2\pi a|t|}$. En effet, $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi a|t|}e^{-2i\pi tx}dt$, soit

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi(a-ix)}\left[e^{2\pi at}e^{-2i\pi tx}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-2\pi(a+ix)}\left[e^{-2\pi at}e^{-2i\pi tx}\right]_{0}^{\infty}.$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}.$$

Donc $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi a|n|}$ (formule sommatoire de Poisson). Un calcul direct donne alors :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi a|n|} = 2\sum_{0}^{\infty} e^{-2\pi an} - 1 = \frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} = \frac{\cosh \pi a}{\sinh \pi a} = \coth \pi a$$