Groupe de paveurs

Benjamin Hellouin

Berger, "Geometry"

Définition 1. *Soit E un espace affine de dimension 2 et $P \subset E$ une tuile compacte d'intérieur non vide. Soit G un sous groupe de $Isom^+(E)$ tel que :*
- $\bigcup_{\varphi \in G} \varphi(P) = E$;
- $\mathring{\varphi}_1(P) \cap \mathring{\varphi}_2(P) \Rightarrow \varphi_1(P) = \varphi_2(P)$.

(groupe de paveurs directs de E).

Ces pavages particuliers correspondent aux pavages périodiques (on peut trouver des pavages apériodiques ne correspondant à aucun groupe). On va en particulier montrer le résultat suivant :

Théorème 1. *L'ensemble des translations de G forme un réseau de E, i.e. il existe deux translations non colinéaires $\tau_{\overrightarrow{u}}$ et $\tau_{\overrightarrow{u}}$ telles que cet ensemble soit $\mathbb{Z}\tau_{\overrightarrow{u}} + \mathbb{Z}\tau_{\overrightarrow{v}}$.*

Preuve. Soit Γ le sous-groupe des translations de G. Si $\Gamma = \{Id\}$, alors G ne contient que des rotations de même centre : en effet, si r et s sont deux translations de centre différent, alors $rsr^{-1}s^{-1}$ est une translation non triviale (partie linéaire = Id, $sr \neq rs$ en considérant l'image du centre de r). Mais si toutes les rotations ont même centre, alors $g(P)$ est contenu dans un disque de rayon fini, contradiction.

Supposons à présent que Γ ne contienne que des translations parallèles. Pour toute rotation $r \in G$, on a $r\tau_{\overrightarrow{v}}r^{-1} = \tau_{r(\overrightarrow{v})}$, soit $r(\overrightarrow{v})//\overrightarrow{v}$, d'où on déduit que toute rotation de G est une réflexion. De plus, les centres des rotations de G sont contenus sur une même ligne, car $r \circ r'$ est une translation de direction $2\overrightarrow{O_rO_{r'}}$. Par conséquent, $g(P)$ est contenu dans une bande autour de cette droite, contradiction.

On veut trouver la base du réseau, i.e. des translations de vecteurs de norme minimale. Soit δ le diamètre de la tuile de base, $a \in P$ et $R > 0$. Alors les translations telles que $\tau(P) \cap B(a, R) \neq \emptyset$ vérifient $\tau(P) \in B(a, R + \delta)$, et sont donc en nombre fini (argument de volume). Les translations forment donc un sous-groupe discret.

Soit maintenant $\overrightarrow{u}$ de norme minimale et $\overrightarrow{v}$ non colinéaire à $\overrightarrow{u}$, de norme minimale. Le réseau engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est inclus dans Γ, et supposons qu'il existe $\tau_{\overrightarrow{w}} \in \Gamma$ avec $\overrightarrow{w} \notin \mathbb{Z}\overrightarrow{v} \oplus \mathbb{Z}\overrightarrow{u}$, qu'on peut supposer dans le parallélogramme fondamental. Mais alors $\overrightarrow{w}$ est inclus dans un des deux triangles, et en supposant que ce soit celui du bas, on a $||\overrightarrow{w}|| \leq \frac{1}{2}||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$, contradiction.

Corollaire 1. *Vis-a-vis des translations, les pavages réguliers se ressemblent. Cela explique comment, en quotientant par les translations et en étudiant les rotations qui définissent localement le pavage, on trouve cinq groupes de pavage possibles (à changement de réseau près).*