$\mathcal{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60

Benjamin Hellouin

Neumann, Stoy, Thompson, "Group actions in group theory"

Théorème 1. *Soit G un groupe simple d'ordre 60. Alors $G \simeq \mathcal{A}_5$.*

Preuve. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. On appliquer le théorème de Sylow : notons E_5 l'ensemble des 5-Sylow de G et $n_5 = |E_5|$. Alors on sait que $n_5 \mid 12$ et $n_5 \equiv 1 \mod 5$. On en déduit que $n_5 = 1$ ou 6. $n_5 = 1$ est absurde puisque le conjugué d'un 5-Sylow est un 5-Sylow et que l'unique 5-Sylow de G serait donc distingué. On en déduit que $n_5 = 6$.

Les six 5-Sylow de G sont conjugués deux à deux. Donc G agit transitivement sur E_5 par conjugaison, autrement dit, on a un morphisme $\varphi : G \mapsto \mathfrak{S}(E_5) \simeq \mathfrak{S}_6$. Le noyau de ce morphisme est distingué dans G, donc on a $\mathrm{Ker}(\varphi) = G$ (absurde par transitivité) ou $\{1\}$. Donc φ est injectif, et G est isomorphe à un certain sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$, noté H.

Remarquons maintenant que $D(H) \neq \{1\}$ puisque H n'est pas abélien (il a des sous-groupes non distingués), donc on a $D(H) = H$. Comme $D(H) \subseteq D(\Sigma_6)$, on en déduit $H \subseteq \mathcal{A}_6$.

On va maintenant considérer l'ensemble des classes à gauche de $\mathcal{A}_6$ sous l'action de H, qui contient $\frac{1}{2}6!/60 = 6$ éléments. Alors $\mathcal{A}_6$ agit par translation à gauche sur ces classes, ce qui donne un morphisme $\psi : \mathcal{A}_6 \to \mathfrak{S}(\mathcal{A}_6/H) \simeq \mathfrak{S}_6$. Comme $\mathcal{A}_6$ est simple, on a de nouveau $\mathrm{Ker}(\psi) = \{1\}$: on veut montrer que c'est de plus un automorphisme.

Considérons le morphisme $\varepsilon \circ \psi : \mathcal{A}_6 \to \{-1, 1\}$. Ce morphisme ne peut être injectif (cardinal), donc il est trivial (simplicité) et on en déduit que $\psi(\mathcal{A}_6) \subseteq \mathcal{A}_6$). Pour résumer, on a $H \simeq \psi(H) \subseteq \mathcal{A}_6$. Or, si $h \in H$, alors $\psi(h)$ fixe H (action par translation à gauche), et on a même l'équivalence. $\psi(h)$ est l'ensemble des permutations de $\mathcal{A}_6$ fixant un point, i.e. $\psi(H) \simeq A_5$