Image de l'exponentielle

Benjamin Hellouin

Dév. de Sylvain ?

Définition 1. *On définit* $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ *qui est normalement convergente pour toute norme.*

Théorème 1. $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ *est surjective, non injective.*

Non-injectivité : $\exp(\lambda Id) = e^{\lambda} Id$, d'où la non-injectivité avec par exemple $\lambda = 0$ et $\lambda = 2i\pi$.

Surjectivité : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $\exp(A)$ est une limite de polynômes en A ; or l'algèbre des polynômes en A, notée $\mathbb{C}[A]$, est un s-ev de l'espace des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$, qui est de dimension finie. Par conséquent, $\mathbb{C}[A]$ est fermé, et $\exp(A)$ est un polynôme en A. De plus, deux éléments de $\mathbb{C}[A]$ commutent, et on a donc $e^{M+N} = e^M e^N$ dans cet espace (calcul direct). En particulier, $\exp(A)$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$. Autrement dit, on a une restriction de exp, notée φ, qui est un morphisme de $(\mathbb{C}[A], +)$ dans $(\mathbb{C}[A]^*, \times)$ où $\mathbb{C}[A]^* = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$. On veut montrer que son image est un ouvert fermé de l'espace connexe $\mathbb{C}[A]^*$.

On montre l'ouverture par inversion locale. exp est une somme de fonctions polynômiales P_n qui sont C^1 et qui vérifient $DP_n(M) = \sum_{i=0}^{n} \frac{M^i H M^{n-i-1}}{n!}$. Sur la boule $B(0,R)$, la somme $\sum_{n\geq 0} ||DP_n(M)||_\infty$ est majorée par $\sum_{n\geq 0} \frac{nR}{n!}$ qui converge. $\sum P_n$ converge (un point suffit), $\sum DP_n$ converge normalement sur tout compact, donc exp est une fonction C^1. De même pour φ.

Comme $\forall n \geq 2, DP_n(0) = 0$, on a $D\varphi(0) = Id_{\mathbb{C}[A]}$. D'après le théorème d'inversion locale, on peut trouver un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C}[A]$ et un voisinage ouvert V de Id dans $\mathbb{C}[A]^*$ tels que φ_U^V soit un C^1-difféomorphisme. Prenons alors $M = \exp(P(A))$: alors $M \cdot V = \exp(P(A)) \cdot \varphi(U) = \varphi(P(A) + U) \subseteq \varphi(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^*$ contenant M.

Fermeture : $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}[A]^*$, donc l'ensemble de ses classes à gauche forme une partition de $\mathbb{C}[A]^*$. De plus, la multiplication à gauche étant un homéomorphisme, ces classes à gauche sont ouvertes. Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est le complémentaire d'une réunion d'ouverts, donc fermée.

Connexité : On veut tracer un chemin dans $\mathbb{C}[A]^*$ entre M et N, de la forme $(1-t)M + tN$. $\det((1-z)M + zN)$ est un polynôme qui peut s'annuler sur $]0,1[$, mais si on considère z complexe, $\mathbb{C}$ privé des zéros de ce polynôme reste connexe par arcs. On a donc un chemin $\psi : [0,1] \to \mathbb{C}$ avec $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = 1$, et

$t \to \det((1-\psi(t))M + \psi(t)N)$ constitue bien un chemin de $\mathbb{C}[A]^*$. Ceci permet de conclure.

Théorème 2. $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ *est exactement l'ensemble des carrés de* $GL_n(\mathbb{R})$.

Sens direct : si $M = e^A$, alors $M = (e^{A/2})^2$. *Sens réciproque :* soit $M = N^2$. On a $N = \exp(P(N))$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors $\overline{N} = \exp(\overline{P(N)}) = \exp(\overline{P}(N))$. Alors $M = N\overline{N} = \exp((P+\overline{P})(N))$ et $P + \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$. D'où l'inclusion réciproque.