Inégalité d'Young

Benjamin Hellouin

non référencé

Théorème 1 (Inégalité d'Young)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante, surjective, telle que $f(0) = 0$. Alors on a*

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt \leq xy$$

avec égalité pour $y = f(x)$.

Commençons par prouver le cas d'égalité $y = f(x)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on partitionne $[0, x]$ en n intervalles. Le premier terme vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{kx/n}^{(k+1)x/n} f(t)dt + \int_{f(kx/n)}^{f((k+1)x/n)} f^{-1}(t)dt \right]$$

et pour chaque terme, on a

$$\frac{x}{n} f\left(\frac{kx}{n}\right) \leq \int_{kx/n}^{(k+1)x/n} f(t)dt \leq \frac{x}{n} f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right)$$

$$\frac{kx}{n}\left(f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{kx}{n}\right)\right) \leq \int_{kf(x)/n}^{(k+1)f(x)/n} f^{-1}(t)dt \leq \frac{(k+1)x}{n}\left(f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{kx}{n}\right)\right)$$

On a alors les majorations et minorations suivantes :

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(k+2)x}{n} f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - \frac{(k+1)x}{n} f\left(\frac{kx}{n}\right) \right] = \frac{(n+1)x}{n} f(x) - \frac{x}{n} f(0) \to xf(x)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{kx}{n} f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - \frac{(k-1)x}{n} f\left(\frac{kx}{n}\right) \right] = \frac{(n-1)x}{n} f(x) + \frac{x}{n} f(0) \to xf(x)$$

Soit au final, en passant à la limite par convergence encadrée, on a $\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$.

Traitons maintenant le cas général. On pose $\Phi_x : y \mapsto xy - \int_0^x f(t)dt - \int_0^y f^{-1}(t)dt$. Cette fonction est dérivable en tout point, de dérivée $\Phi_x'(y) = x - f^{-1}(y)$. Cette fonction est strictement décroissante, donc Φ_x est strictement concave est admet un unique maximum en $y = f(x)$. Le cas précédent permet d'obtenir l'inégalité ainsi que l'unicité du cas d'égalité.