Inversion de Fourier dans S

Benjamin Hellouin

Stein & Shakarchi, Chap.5 : Fourier transform

Théorème 1. *Si $f \in S(\mathbb{R})$, alors*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{2\pi i x t} dt.$$

Preuve. Soit $G_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2}$ pour $\delta > 0$. On a $\hat{G}_\delta(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t - \pi\delta x^2} dx$. On remarque que $G'_\delta(x) = -2\pi\delta x G'_\delta(x)$; puisque $G_\delta \in S(\mathbb{R})$, on en déduit $2i\pi t \hat{G}_\delta(t) = -2\widehat{\pi\delta x G_\delta}(t)$. Or $\hat{G}'_\delta(t) = -2\widehat{i\pi x G_\delta}(t)$ (dérivation sous l'intégrale), d'où $\hat{G}'_\delta(t) = \frac{i}{\delta} 2i\pi t \hat{G}_\delta(t) = \frac{-2\pi t}{\delta} \hat{G}_\delta(t)$.

Donc $\hat{G}_\delta(t)$ est de la forme $\alpha e^{-\pi t^2/\delta}$ où $\alpha = G_\delta(0)$ qui est l'intégrale d'une gaussienne. On calcule cette intégrale, notée I, par la méthode connue :

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\delta x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\delta y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi\delta(x^2+y^2)} dx dy$$

par le théorème de Fubini. En effectuant le changement de variables polaire, on obtient $I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\pi\delta r^2} r dr d\theta = 2\pi [\frac{e^{-\pi\delta r^2}}{-2\pi\delta}]_0^\infty = \frac{1}{\delta}$. On en déduit $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$.

On note $K_\delta(t) = \hat{G}_\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{2\pi}{\delta} t^2}$. On va maintenant prouver que, pour tout $f \in S$, on a $\int_{\mathbb{R}} K_\delta f = \int_{\mathbb{R}} G_\delta \hat{f}$, le terme de gauche étant une approximation de l'unité quand $\delta \to 0$. On a en effet :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G_\delta(x) e^{-2i\pi x y} f(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G_\delta(x) e^{-2i\pi x y} f(y) dy dx \quad \text{par Fubini,}$$

ce qui est exactement la proposition recherchée. Dans le membre de droite, on a $G_\delta(t) \to 1$ quand $\delta \to 0$ pour tout t, et $|\hat{f}(x) G_\delta(x)| \leq |\hat{f}(x)| \in L^1$ car $f \in S$, d'où par convergence dominée

$$\int_{\mathbb{R}} G_\delta(x) \hat{f}(x) dx \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) dx.$$

D'autre part, comme on l'a dit, le terme de droite est une approximation de l'unité, c'est-à-dire que :

- $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{\mathbb{R}} G_{1/\delta}(x) dx = 1$
- $\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists \delta > 0 \int_{|x|>\eta} K_\delta(x) dx < \varepsilon$.

Pour le deuxième point, il suffit de voir que $\int_{|x|>\eta} K_\delta(x) dx = \int_{|x|>\eta/\sqrt{\delta}} e^{2\pi x^2} dx$ par le changement de variables $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{\delta}}$, et que cette intégrale tend vers 0 quand

$\delta \to 0$.

On va maintenant conclure. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)K_\delta(x)dx - f(0) = \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(0))K_\delta(x)dx \quad \text{(premier point)}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)K_\delta(x)dx - f(0) \right| \leq \int_{|x|\leq\eta} |f(x)-f(0)|K_\delta(x)dx + 2||f||_\infty \int_{|x|>\eta} K_\delta(x)dx,$$

ceci étant vrai pour tout η. En particulier, soit $\varepsilon > 0$ et η tel que $|x| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon/2$. Alors $\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)K_\delta(x)dx - f(0)\right| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$ par les points 1 et 2, pour δ assez petit.

En reprenant l'égalité précédente, $f(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)dx$ à la limite. Pour conclure, on applique ce résultat à $F_x : y \mapsto f(x+y) \in S$:

$$f(x) = F_x(0) \int_{\mathbb{R}} \hat{F}_x(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y)e^{-2i\pi yt}dydt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-2\pi(z-x)t}dzdt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{2\pi xt}dt$$