Isométries du cube

Benjamin Hellouin

Nourdin, sous-groupes finis...(voir Combes

On définit le cube comme l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^3$ des 8 points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (notés arbitrairement $S_1 \ldots S_8$).

Théorème 1. *Le groupe G des applications affines positives qui stabilisent le cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.*

Lemme 1. *Si $f \in G$, alors f est une isométrie linéaire.*

Preuve du lemme. Soit ϕ une telle application. Comme les applications affines conservent les points extrémaux, ϕ stabilise l'ensemble des sommets du cube. Donc ϕ stabilise l'isobarycentre de ces points (0), d'où on déduit qu'il s'agit d'une application linéaire. Pour montrer que f est une isométrie, il suffit de montrer qu'il envoie un repère orthonormé sur un repère orthonormé, repère qu'on peut choisir sur le cube (dessin).

Considérons une des faces du repère. L'application l'envoie sur un plan, et le cube doit être entièrement inclus d'un des deux cotés du plan, sinon un point du plan pourrait être exprimé comme barycentre de points hors du plan, ce qui est absurde. Donc l'application envoie face sur face. Comme les points extrémaux sont permutés, les trois faces autour de S_1 sont envoyées sur les trois faces autour de $f(S_1)$, donc l'image du repère est orthonormée.

Notons que la permutation des sommets détermine entièrement l'isométrie (barycentres). Cependant, toutes les permutations ne sont pas représentées : les sommets diagonalement opposés le restent (par isométrie) et donc ϕ envoie diagonale sur diagonale. On note arbitrairement $\delta_{1\ldots 4}$ ces diagonales (partant de S_1, S_2, S_3, S_4, tous situés sur la même face - cf.dessin).

Preuve du théorème. On a donc un morphisme $\varphi : G \to \mathfrak{S}_4$ représentant l'action de l'isométrie sur chaque diagonale. On va montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme de groupes.

Surjection. Il suffit de montrer qu'une partie génératrice de $\mathfrak{S}_4$ appartient à l'image de φ, en l'occurence l'ensemble des transpositions $(j\ j+1)$. Pour $j = 1$, soit Δ le plan engendré par les deux autres diagonales et s la rotation d'angle π (symétrie axiale) par rapport à l'axe perpendiculaire à Δ, passant par 0. Cet axe passe par le milieu de S_1 et S_2 donc échange δ_1 et δ_2, et comme δ_3 et δ_4 appartiennent à Δ et passent par 0, elles sont inchangées. Donc $\varphi(s) = (1\ 2)$ et les autres cas sont similaires.

Injection. Cherchons toutes les isométries appartenant à $ker(\varphi)$, c'est-à-dire telles que $f|_{\delta_i} = \pm id$ pour tout i, et cela détermine entièrement l'isométrie (car cela détermine les sommets). À permutation près, on a les cas suivants :

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
1	$+$	$+$	$+$	$+$
2	$+$	$+$	$+$	$-$
3	$+$	$+$	$-$	$-$
4	$+$	$-$	$-$	$-$
5	$-$	$-$	$-$	$-$

Le cas n°5 est $-id$, donc non positif. Le cas n°2 est impossible car on aurait $f = id$ sur une base de $\mathbb{R}^{\nVDash}$, et symétriquement pour le cas n°4. Enfin, le cas n°3 est exclu car f aurait deux sous-espaces propres distincts de dimension 2. Donc $ker(\varphi) = \{id\}$, et φ est un isomorphisme.