Isom(E) est engendré par les réflexions

Benjamin Hellouin

Audin - chapitre 2

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Toute isométrie de $O(E)$ peut s'écrire comme la composée de p réflexions, $p \leq n$.*

Preuve par récurrence sur n.

Initialisation. Les applications linéaires d'une droite euclidienne sont de la forme $x \mapsto \lambda x$, et les isométries sont donc Id et -Id, composées de zéro ou une réflexion.

Hérédité. Supposons le résultat vrai pour tout espace de dimension $n-1$, soit E de dimension n et $f \in O(E)$.

Supposons qu'il existe un point fixe $x_0 \neq 0$, et soit $H = \{x_0\}^\perp$ qui est donc un hyperplan. Or f fixe $\text{Vect}(x_0)$, donc ${}^t f = f^{-1}$ fixe H, et de même pour f. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $f|_H$: on a $f|_H = s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_p}, p \leq n-1, dim(H_i) = n-2$. Il faut transformer ces hyperplans de H en hyperplans de E. Pour ce faire, on note E_i l'hyperplan engendré par H_i et x_0. Alors on a $f = s_{E_1} \dots s_{E_p}$. En effet, en décomposant E en $\{x_0\} \oplus H$, on a :

$$\begin{cases} s_{E_i}(x_0) = x_0 & \text{car } x_0 \text{ appartient à } E_i; \\ s_{E_i}(y) = s_{H_i}(y) & \text{pour } y \in H, \text{ car } (s_{H_i}(y) - y) \in (H_i^\perp \cup \{x_0\}^\perp) \end{cases}$$

Comme $p \leq n-1$, on obtient le résultat recherché.

Il reste maintenant à considérer le cas où f n'admet aucun point fixe. Soit $x_0 \neq 0$ quelconque et H l'hyperplan médiateur de x_0 et $f(x_0)$, autrement dit l'ensemble des points à même distance de x_0 et de $f(x_0)$. Il s'agit d'un hyperplan affine a priori, mais il est vectoriel car $||x_0|| = ||f(x_0)||$. On a en réalité $y \in H \Leftrightarrow \langle y, x_0 \rangle = \langle y, f(x_0) \rangle$, soit $H = (x_0 - f(x_0))^\perp$, de telle sorte que $s|_H \circ f(x_0) = x_0$. En appliquant le résultat précédent à $s|_H \circ f$, on a $s|_H \circ f(x_0) = s_{H_1} \dots s_{H_p}$, soit $f = s|_H \circ s_{H_1} \dots s_{H_p}$. f est donc le produit de $p+1 \leq n$ réflexions, et la récurrence est établie.

Corollaire 1. *Soit E un espace affine de dimension n. Toute isométrie de $Isom(E)$ peut s'écrire comme la composée de p réflexions, $p \leq n+1$.*

Preuve. Soit $f \in Isom(E)$: alors $\overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})$. En effet, $||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy})|| = ||\overrightarrow{f(x)f(y)}|| = ||\overrightarrow{xy}||$. Par le résultat précédent, on a $\overrightarrow{f} = s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_p}, p \leq n$.

De la même façon que précédemment, on distingue les cas. Si f possède un point fixe $A \in E$, on fixe l'origine à A. Alors $f(X) = A + s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_p}(\overrightarrow{AX}) =$

$g_{H_1} \circ \cdots \circ g_{H_p}(X)$ où $g_{H_i}(X) = A + s_{H_i}(\overrightarrow{AX})$

Sinon, on prend A quelconque et H l'hyperplan médiateur (affine) de $(A, f(A))$. Alors $s|_H \circ f$ admet A comme point fixe, et en appliquant le résultat précédent, on obtient $f = s|_H \circ s_{H_1} \dots s_{H_p}$ produit de $p+1 \leq n+1$ réflexions.