Lemme de Gessel-Viennot

Benjamin Hellouin

Aignan, “Lattice paths and determinants”

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté acyclique auquel on associe une pondération $w : E \to \mathbb{R}$. Entre deux sommets A et B, on a un nombre fini de chemins, auxquels on associe un poids $w(P) = \prod_{e \in P} w(e)$, de sorte que le chemin vide soit de poids 1. À des ensembles de sommets $\{A_1 \dots A_n\}$ et $\{B_1 \dots B_n\}$ on associe alors la matrice de chemins $M = (m_{ij})$ avec

$$m_{ij} = \sum_{P : A_i \to B_j} w(P).$$

Par ailleurs, on appelle système de chemins S tout choix d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et de chemins $P_i : A_i \to B_{\sigma(i)}$. Si S est un tel système, on dit qu'il est disjoint si aucune arête n'est utilisée deux fois.

Lemme 1 (de Gessel-Viennot). *Avec les notations précédentes, on a*

$$\det M = \sum_{S \text{ disjoint}} \varepsilon(\sigma_S) w(S)$$

où $w(S) = \prod_{P_i \in S} w(P_i)$ et la somme porte sur les systèmes de chemins disjoints.

Preuve. À permutation fixée, un terme du déterminant s'écrit

$$\varepsilon(\sigma) \left(\sum_{P_1 : A_1 \to B_{\sigma(1)}} w(P_1) \right) \dots \left(\sum_{P_n : A_n \to B_{\sigma(n)}} w(P_n) \right),$$

produit où apparaissent clairement tous les systèmes de chemins de permutation associés à la permutation σ. On a donc $\det M = \sum_S \varepsilon(\sigma_S) w(S)$, où la somme porte sur tous les systèmes de chemins. Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des systèmes non disjoints, Il nous reste donc à montrer que $\sum_{S \in N} \varepsilon(\sigma_S) w(S) = 0$.

Considérons l'application $\pi : N \to N$ suivante : pour $S \in N$, soit i_0 le plus petit entier tel que P_{i_0} intersecte un autre chemin, X le premier sommet à la croisée des chemins, et $j_0 > i_0$ le premier chemin contenant X. Alors on définit $\pi(S)$ comme le système associé à la permutation $\sigma_S \circ \tau_{i_0, j_0}$ et défini par les chemins :

- $P'_{i_0} : A_{i_0} \to B_{\sigma(j_0)}$ suit P_{i_0} jusqu'à X puis suit P_{j_0}
- inversement pour P'_{j_0}
- $P'_k = P_k$ sinon.

Alors on a bien $\pi : N \to N$ et, de plus, π est une involution puisque les indices i_0 et j_0 associés à $\pi(S)$ sont les mêmes que ceux associés à S. Sonc π est une bijection. De plus, π préserve le poids (les système utilisent les mêmes arêtes) et les signatures de σ_S et de $\sigma_S \circ \tau_{i_0,j_0}$ sont opposées. Ceci permet de conclure.

Corollaire 1. *Soit $a_1 < \cdots < a_n$ et $b_1 < \cdots < b_n$ deux ensembles d'entiers positifs. On s'intéresse au déterminant de la matrice* $(\binom{a_i}{b_j})$.

Considérons le graphe orienté consistant en le huitième nord-nord-est de $\mathbb{Z}^2$, orienté vers le sud et vers l'est, toutes les arêtes pondérées par 1. On note $A_i = (0, a_i)$ et $B_i = (b_i, b_i)$, de sorte que le nombre de chemins de A_i à B_i soit exactement $\binom{a_i}{b_j}$: ceci correspond au déterminant recherché. Or aucun système de chemins disjoint n'existe pour $\sigma \neq Id$: on en déduit

$$det(\binom{a_i}{b_j}) = |\{\text{systèmes de chemins disjoints } A \to B\}|,$$

ce qui garantit que ce déterminant est positif (c'est un dénombrement !) et même non nul, sauf si $a_i < b_i$ pour un certain i (on a toujours un tel système, par exemple des chemins exclusivement est puis nord).