Méthode de Newton

Benjamin Hellouin

Demailly, 2.3
Dumas, A.1

Théorème 1. *Soit $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $x \in \Omega$ tel que $f(x) = 0$.*

- *Si x est de multiplicité 1, à savoir que $f'(x) \neq 0$, il existe un voisinage V de x tel que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$x_0 \in V, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

  est bien définie et converge quadratiquement vers x.
- *Si x est de multiplicité 2, toute suite définie par la même formule si $x_n \neq x$ et par $x_{n+1} = x_n = x$ sinon est encore bien définie dans un voisinage V et converge géométriquement vers x.*

Si on ne connaît pas d'approximations des racines de f, on peut affaiblir les hypothèses : si $f(a)f(b) < 0$ et si f' ne s'annule pas sur $[a, b]$, alors f admet une unique racine sur $[a, b]$ et le théorème s'applique.

Preuve.
Soit V un voisinage tel que f' ne s'annule pas hors de x_0. Dans le cadre de la remarque, $[a, b]$ est un tel voisinage. En particulier, f' garde un signe constant, donc f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme $f(a)f(b) < 0$, une racine existe et elle est unique.

On prouve maintenant le premier cas du théorème : on choisit un voisinage fermé V tel que f' ne s'annule pas et on note $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On pose $M = \max_V |f''|$ et $m = \min_V |f'|$ En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $x \in V$ et x_0, on a

$$|f(x_0) - f(x) - (x_0 - x)f'(x)| \leq \frac{(x_0 - x)^2}{2} M$$

$$|x_0 - \varphi(x)| \leq \frac{m}{2m}(x_0 - x)^2$$

ce qui garantit la convergence quadratique quand le voisinage est assez petit.

Preuve du second cas. On peut considérer un voisinage tel que $f'(x) \neq 0$ pour $x \neq x_0$. Alors on définit φ comme précédemment en prolongeant $\varphi(x_0) = x_0$. On redéfinit φ en prolongeant par $\varphi(x_0) = x_0$. On montre alors que x_0 est un point fixe attractif pour φ et que $\varphi'(x_0) \neq 0$, ce qui garantit une convergence géométrique.

Pour $x \neq x_0$, on a

$$g'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}.$$

On fait un développement limité de f, f' et f'' autour de x_0 et on trouve :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x-x_0)}{2} f''(x) + o((x-x_0)^2) \\ f'(x) = (x-x_0)f''(x_0) + o(x-x_0) \\ f''(x) = f''(x_0) + o(1) \end{cases}$$

Par conséquent, $\lim \varphi'(x) = \frac{1}{2}$ (on simplifie partout et on a $\frac{1+o(1)}{2+o(1)}$), donc φ est C^1 et x_0 est un point fixe attractif ($|\varphi'(x_0)| < 1$).