# Méthode des tableaux

Benjamin Hellouin

Davis-Nour-Raffali

**Théorème 1.** *Si la méthode des tableaux appliquée à un séquent ne contenant que des formules closes réussit, alors ce séquent est prouvable.*

On présente rapidement un exemple pour insister sur l'importance de l'hypothèse $(\vdash \exists^1 x(R(x) \to \forall^1 y R(y)))$.

On présente une preuve sémantique, autrement dit une preuve qui utilise la complétude de la logique du premier ordre : pour montrer que le séquent est prouvable, on montre que tout modèle $\mathcal{M}$ satisfait ce séquent. Par récurrence sur le nombre *total* de règles utilisées à l'étape 2, on va même montrer un résultat plus général : pour tout ensemble de séquents prouvables et pour tout modèle $\mathcal{M}$, il existe un environnement $e$ qui satisfont tous ces séquents. le résultat en découle puisque le terme est clos, et sa valeur ne dépend pas de l'environnement.

**Initialisation.** Supposons qu'on n'utilise aucune règle et que la méthode réussisse avec la substitution $\sigma$. Puisque $\sigma$ est idempotente, on peut définir $e(x_d)$ arbitrairement pour les variables de droite et $e(x_g) := e(\sigma(x_g))$ pour les variables de gauche.

**Hérédité.** Supposons que le résultat soit vrai pour tout séquent sur lequel la méthode réussit en utilisant $n$ règles. Soit $S$ un séquent sur lequel la méthode réussit en utilisant $n+1$ règles, et distinguons les cas suivant la dernière règle utilisée. Le résultat est évident pour toutes les règles à l'exception de $\exists_g^{sk}$ et $\forall_d^{sk}$. On considère ce second cas, l'autre étant symétrique.

L'ensemble $S$ est de la forme $T \cup \{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A\}$. L'application de $\forall_d^{sk}$ donne l'ensemble $S' = T \cup \{\Gamma \vdash \Delta, A[x \leftarrow f_1(x_1, \dots x_k)]\}$.

Soit $\mathcal{M}$ un modèle du langage de $S$. On étend $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}'$ en interprétant $f$ (qui est une variable "fraîche") comme le *contre-exemple potentiel* de $\forall x A$ : si $a_1 \dots a_n \in \mathcal{M}^n$, soit $e$ un environnement arbitraire tel que $e(x_i) = a_i$. Alors $f_{\mathcal{M}'}(a_1 \dots a_n) =$

- si $\mathcal{M}, e \vDash \forall x A$ : un élément quelconque.
- sinon, un élément $c \in \mathcal{M}$ tel que, si on définit $e'(x_i) = a_i$ et $e'(x) = c$, alors on ait $\mathcal{M}, e'' \vDash A$.

Par hypothèse de récurrence, il existe un environnement $e''$ qui rend vrai dans $\mathcal{M}$ chaque séquent de $S'$. Alors cet environnement satisfait également $S$. En effet :

- il satisfait chaque séquent de $T$ ;

- si $\mathcal{M}, e'' \vDash \forall x A$ : on a aussi $\mathcal{M}, e'' \vDash \Gamma \vdash \Delta, \forall x A$ ;
- sinon : par définition de $f_{\mathcal{M}'}$, on a $\mathcal{M}', e'' \nvDash A[x \leftarrow f_1(x_1 \dots x_n)]$. Mais comme $e''$ satisfait $\Gamma \vdash \Delta, A[x \leftarrow f_1(x_1 \dots x_n)]$, il doit satisfaire $\Gamma \vdash \Delta$, et donc on a $\mathcal{M}, e'' \vDash \Gamma \vdash \Delta, \forall x A$.