Autour de la marche aléatoire unidimensionnelle

Benjamin Hellouin

Durret, “de Moivre-Laplace” et “recurrence”
Foata-Fuchs, “problème du scrutin”

Soit $X_1, \dots$ des v.a. i.i.d. avec $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On a $P(S_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} 2^{-2n}$, soit $2n + S_{2n} \sim 2Binom(2n, 1/2)$.

Théorème 1. *La marche aléatoire unidimensionnelle est récurrente, autrement dit,* $P(\exists n > 0, S_n = 0) = 1$.

Preuve. D'après ce qu'on vient de dire, $P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$, 0 sinon. Par la formule de Stirling, on a $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, et :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2n^{2n}}{n^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Par conséquent, $P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Ceci ne suffit pas encore à conclure. Définissons les temps de retour $\tau_1 = \inf(n > 0 : S_n = 0)$ et $\tau_j = \inf(n > \tau_{j-1} : S_n = 0)$.

Lemme 1. $\forall j, P[\tau_j < \infty] = P[\tau_1 < \infty]^j$.

Preuve du lemme : on procède par induction. L'initialisation est évidente, on suppose le résultat vrai pour $n-1$. $P[\tau_n < \infty] = P[\tau_{n-1} < \infty] P[\tau_n < \infty \mid \tau_{n-1} < \infty]$ et ce deuxième terme vaut $P[\tau_1 < \infty]$ par invariance par translation de la loi des X_i.

On voit qu'alors le nombre de retours est

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{S_n = 0} = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\tau_j < \infty}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n = 0) = \sum_{j=1}^{\infty} P[\tau_1 < \infty]^j \text{ en passant à l'espérance,}$$

et on conclut car le terme de gauche est infini par le lemme. $P[\tau_1 < \infty] = 1$ et même $\forall j, P[\tau_j < \infty] = 1$.

Redénombrons le nombre de chemins allant de $(0,0)$ à (n,s) : si un tel chemin monte p fois et descend q fois, on a $p + q = n$ et $p - q = s$, soit $p = \frac{n+s}{2}$ et $q = n - s2$. Le nombre de tels chemins vaut $c_{n,s} = \binom{p+q}{p}$.

Lemme 2 (Principe de réflexion)**.** *Le nombre de chemins allant de* (a, α) *à* (b, β)*,* $\alpha, \beta > 0$ *qui touchent ou traversent l'axe horizontal, est égal au nombre de chemins allant de* $(-a, \alpha)$ *à* (b, β)*.*

Faire un dessin : si T est le premier point où le chemin touche l'axe horizontal, alors on obtient un chemin de $(-a, \alpha)$ à (b, β) en prenant le symétrique de cette première portion. Ceci définit clairement une bijection de la première classe de chemins vers la seconde.

Théorème 2. *Le nombre de chemins allant de* $(0, 0)$ *à* (n, s) *en restant strictement au-dessus de l'axe horizontal est égal à*

$$\frac{s}{n} c_{n,s} = \frac{p-q}{p+q} \binom{p+q}{p}.$$

Preuve. Il s'agit du nombre de chemins allant de $(1, 1)$ à (n, s) sans toucher l'axe horizontal. D'après le principe de réflexion, ce nombre vaut

$$c_{n-1,s-1} - c_{n-1,s+1} = \binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \left[\frac{p}{p+q} - \frac{q}{p+q} \right]$$
$$= \frac{p-q}{p+q} \binom{p+q}{p} = \frac{s}{n} c_{n,s}.$$