Série génératrice des nombres de Bernoulli

Benjamin Hellouin

FGN analyse 2

Soit φ_z la fonction 2π-périodique définie par $x \mapsto \exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right)$ pour $x \in]-\pi, \pi]$, où $z \in \mathbb{C}\backslash 2i\pi z$. φ est évidemment C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, et ses coefficients de Fourier sont :

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{zx}{2\pi}} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{z/2\pi - ni}\left[e^{\frac{zx}{2\pi}} e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})}{z - 2i\pi n}.$$

Le théorème de Dirichlet permet d'affirmer que sa série de Fourier converge en tout point vers $\frac{1}{2}(\varphi(x^+) + \varphi(x^-))$.

On va appliquer le théorème à un point de discontinuité, par exemple π :

$$\frac{1}{2}(e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}) = (e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{in\pi}}{z - 2i\pi n}$$

$$\frac{1}{2}(e^z + 1) = (e^z - 1) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z + 2i\pi n}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

Finalement, on obtient pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash 2i\mathbb{Z}$:

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

Il reste à développer cette somme en série entière. Pour cela, on se place sur le disque $|z| < 2\pi$ (pour avoir $|\frac{z^2}{4\pi^2 n^2}| < 1$) :

$$\frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(4\pi^2 n^2)^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$$

On cherche à inverser l'ordre des séries ci-dessus, et pour ce on prouve la convergence normale par rapport à k : $\sum \frac{|z|^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$ est une série géométrique de raison

< 1, convergente ($|z| < 2\pi$). Par conséquent, on peut échanger l'ordre de sommation et, sur $D(0, 2\pi)\backslash 0$:

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$$

$$= 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{2k}}\right)z^{2k}.$$

Pour conclure, il reste à remarquer que $e^z - 1 = z + o(z)$ en 0, donc f admet un prolongement par continuité $f(0) = 1$, et l'égalité précédente reste valable en 0. On en déduit que les développement est valable sur $D(0, 2\pi)$ et on ne peut pas espérer mieux, vu que $f \to \infty$ en $2i\pi$.