Groupe totalement ordonnable $\Leftrightarrow$ sans torsion

Benjamin Hellouin

Définition 1. *Un groupe est dit totalement ordonnable s'il peut être muni d'un ordre total compatible avec l'opération de groupe.*

On va prouver le résultat suivant :

Théorème 1. *Tout groupe abélien est totalement ordonnable si et seulement s'il est sans torsion.*

Pour cela, on utilisera le théorème de compacité du calcul propositionnel, que l'on rappelle. Soit V un ensemble de variables propositionnelles et $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules sur V et les connecteurs $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Une valuation δ est une application $V \mapsto \{0,1\}$, que l'on étend à l'ensemble des formules de manière inductive ($\tilde{\delta}(\neg f) = 1 - \tilde{\delta}(f)$, etc.), et on dit que cette valuation satisfait $f \in \mathcal{F}$ si $\tilde{\delta}(f) = 1$.

Théorème 2 (Compacité du calcul propositionnel)**.** *Tout ensemble E de formules du calcul propositionnel est satisfaisable si et seulement si il est finiment satisfaisable, i.e, si tout sous-ensemble de E est satisfaisable.*

On prouve maintenant le théorème. Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien.

$(\Rightarrow)$

Soit $\leq$ un ordre total sur G et $x \in G$. Supposons $1 \leq x$: par compatibilité et transitivité, on a $1 \leq x \leq x^i$ pour tout i. Donc, si $\exists i, x^i = 1$, $x = 1$ par antisymétrie. L'autre cas étant symétrique, on conclut que G est sans torsion.

$(\Leftarrow)$

On définit l'ensemble de variables propositionnelles $V = \{A_{x,y} \mid x, y \in G^2\}$ et les ensembles de formules suivants :

$$
\begin{aligned}
&Refl(G) = \{A_{x,x} \mid x \in G\}\\
&Anti(G) = \{\neg(A_{x,y} \wedge A_{y,x}) \mid x, y \in G^2\}\\
&Trans(G) = \{(A_{x,y} \wedge A_{y,z}) \Rightarrow A_{x,z} \mid x, y, z \in G^3\}\\
&Total(G) = \{A_{x,y} \vee A_{y,x} \mid x, y \in G^2\}\\
&Comp(G) = \{A_{x,y} \Rightarrow A_{x.z,y.z} \mid x, y, z \in G^3\}\\
&\mathcal{O}(G) = Refl(G) \cup Anti(G) \cup Trans(G) \cup Total(G) \cup Comp(G)
\end{aligned}
$$

Lemme 1. *G est totalement ordonnable si et seulement si $O(G)$ est satisfaisable.*

Toute valuation δ de V est équivalente à une relation R sur G par l'équivalence suivante : $xRy \Leftrightarrow \delta(A_{x,y}) = 1$. Cette valuation satisfait $\mathcal{O}(G)$ si et seulement si elle définit une relation d'ordre total compatible avec $\cdot$.

Lemme 2. *Si tout sous-groupe de type fini de G est totalement ordonnable, alors G est totalement ordonnable.*

Soit $\mathcal{B}$ une partie finie de $\mathcal{O}(G)$. L'ensemble des éléments de G apparaissant dans au moins une variable de $\mathcal{B}$ sont en nombre fini et engendrent un sous-groupe H. H est ordonnable par hypothèse, donc $\mathcal{O}(H)$ est satisfaisable et $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(H)$ aussi. Par le théorème de compacité, $\mathcal{O}(G)$ est satisfaisable et on conclut par le lemme 1.

Lemme 3. *Si H groupe abélien de type fini est sans torsion, alors il est totalement ordonnable.*

Par la classification des groupes abéliens de type fini, on a $H \simeq (\mathbb{Z}^q, +)$ pour un certain q. Or $(\mathbb{Z}^q, +)$ est totalement ordonnable par l'ordre lexicographique, que l'on note $\leq_{\mathbb{Z}^q}$. Alors l'ordre défini sur H par $x \leq_H y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq_{\mathbb{Z}^q} \varphi(y)$, où φ est un isomorphisme entre H et $\mathbb{Z}^q$, est bien un ordre total compatible avec l'opération de groupe.

On achève la preuve en remarquant que si un groupe est sans torsion, alors ses sous-groupes sont évidemment sans torsion. On remarque que le lemme 2 s'étend sans difficulté à toute relation n-aire respectant un ensemble de contraintes dont chacune ne fait intervenir qu'un nombre fini de variables.