Paires critiques

Benjamin Hellouin

Baader, “Critical pair lemma”

On considère un système de récriture fini terminant R, et on s'intéresse aux conditions pour qu'il soit convergent. Par le lemme de Newton, on peut regarder de manière équivalente s'il est localement confluent (dessin de confluence locale). On cherche à montrer le lemme des paires critiques :

Lemme 1. *Si $s \to t_1, t_2$, alors soit t_1 et t_2 sont joignables, soit on peut écrire $t_i = s[u_i]_p$ avec $\langle u_1, u_2 \rangle$ qui est une instance d'une paire critique de R.*

Soit deux règles $l_i \to r_i$ pour lesquelles on a respectivement $s \to t_i$. Autrement dit, on a deux positions p_i et substitutions σ_i avec $s|_{p_i} = \sigma_i l_i$ et $t_i = s[\sigma_i r_i]_{p_i}$. On distingue les différents cas :

Cas parallèle : p_1 et p_2 correspondent à des branches différentes de l'arbre (dessin). Alors on a confluence locale.

Cas d'inclusion : p_2 correspond à un sous-arbre de p_1 (ou inversement). On se contente de considérer le sous-arbre $\sigma_1 l_1$, que l'on “sépare“ en l_1 et σ_1. On distingue les cas suivant que p_2 est un sommet de l_1 (hors variables) ou de σ_1 :

Premier cas : p_2 appartient à σ_1 (dessin). Dans ce cas, on a également confluence locale. Supposons que la variable x associée au sous-arbre de σ_1 dans lequel se trouve p_2 apparaisse m fois dans l_1 et n fois dans r_1 (dessin).

Second cas : p_2 appartient à l_1 (dessin). Il s'agit du cas intéressant. Pour simplifier, on renomme les deux règles pour qu'elles ne partagent aucune variable. On pose alors $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ (les domaines sont disjoints). Puisque $\sigma_1 l_1|_p = \sigma_2 l_2$, σ est un unificateur de l_1 et de l_2, et $\langle \sigma r_1, (\sigma l_1)[\sigma r_2]_p \rangle$ est une instance d'une paire critique (qui correspond à l'unificateur le plus général).

Théorème 1. *L'unification étant décidable, la confluence d'un système de récriture terminant est décidable.*

En effet, un système fini n'a qu'un nombre fini de paires critiques possibles. Pour l'ensemble des paires de termes gauches et l'ensemble des positions non-variables, on tente d'unifier des versions renommées de ces termes par l'algorithme de Robinson. Pour chacune de ces paires critiques, on réduit les deux membres en forme normale (le système termine), et on teste si on a bien $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$ dans tous les cas.