Polynômes de Bernstein

Benjamin Hellouin

FGN analyse 2

Soit f une fonction continue $[0,1] \to \mathbb{R}$, $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de v.a. i.i.d de loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0,1]$, et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. $\frac{S_n}{n}$ tendant en probabilité vers x, on peut espérer approcher $f(x)$ en calculant $E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$.

Définition 1. *Le n-ième polynôme de Bernstein de f est défini comme*

$$B_n(f)(x) = E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Théorème 1. *B_n converge vers f uniformément sur $[0,1]$. Plus précisément, on a $||f - B_n|| \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, où $\omega(h)$ désigne $\sup\{|f(x)-f(y)| \mid |x-y| \leq h\}$ (module de continuité uniforme).*

Preuve. On a $\forall x, |f(x)-B_n(x)| = |E[f(x)-f(S_n/n)]| \leq E[|f(x)-f(S_n/n)|]$. Or, $\forall \delta \in]0,1[, |f(x)-f(S_n/n)| \leq \omega(\delta)$ si $|x - \frac{S_n}{n}| \leq \delta$, et $\leq 2||f||_\infty$ sinon. Au final, on a :

$$||f(x) - B_n(x)||_\infty \leq \omega(\delta) + 2||f||_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right) \quad \text{(terme majoré par 1)}$$

Or, comme $E(X_i) = x$ et $V(X_i) = x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, on a par la loi faible des grands nombres $||f(x) - B_n(x)||_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{||f||_\infty}{2n\delta^2}$. Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, et puisque $\omega(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$ (uniforme continuité de f sur $[0,1]$), on prouve ainsi le théorème de Weierstrass.

Précisons la vitesse de convergence. On utilisera le résultat suivant : $\forall \lambda > 0, \omega(\lambda f) \leq \lceil\lambda\rceil\omega(f)$. Or on a montré que $|f(x) - B_n(x)| \leq E[|f(x) - f(\frac{S_n}{n})|] \leq E[\omega(|x - \frac{S_n}{n}|)] \leq \omega(\frac{1}{\sqrt{n}}) \cdot E[\sqrt{n}|x - \frac{S_n}{n}| + 1]$.

Étudions ce deuxième terme. Par définition de l'espérance, $E[\sqrt{n}|x - \frac{S_n}{n}| + 1] = \sqrt{n}||x - \frac{S_n}{n}||_1 + 1$. Or $||\varphi||_1 \leq ||\varphi||_2$ (Cauchy-Schwarz) et $||x - \frac{S_n}{n}||_2 = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$ par linéarité de la variance. Comme $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, on a au final :

$$||f - B_n||_\infty \leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \left[\sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} + 1\right] \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Montrons que cette borne est, à une constante près, l'optimal. Soit $f : x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$. Alors $||f - B_n||_\infty \geq |B_n(1/2)| = E\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right|$ où S_n est la somme d'une suite de variables de Bernoulli de paramètres 1/2. En poursuivant, $||f-B_n||_\infty \geq \frac{1}{2n}E|2S_n - n| = \frac{1}{2n}E|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n|$ où (ε_i) est une suite de v.a.i.i.d de variables valant 1 ou -1 avec probabilité 1/2 (variables de Rademacher). On a alors :

$$||f - B_n||_\infty \geq \frac{1}{2n}||\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n||_1 \geq \frac{1}{2cn}||\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n||_2 \quad \text{(admis)}$$

$$\geq \frac{1}{2c\sqrt{n}} \text{ avec } \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$