Preuves dans PA

Benjamin Hellouin

David-Nour-Raffali

On se propose de faire quelques preuves dans l'arithmétique de Péano en utilisant la déduction naturelle en notation linéaire.

On rappelle les axiomes de Péano (inutile pour une vraie leçon, sans doute) :
$A_1 : \forall x, Sx \neq 0$
$A_2 : \forall x, \{x = 0 \vee \exists y, x = Sy\}$
$A_3 : \forall x, y, Sx = Sy \Rightarrow x = y$
$A_4 : \forall x, x + 0 = x$
$A_5 : \forall x, y, x + Sy = S(x + y)$
$A_6 : \forall x, x \times 0 = 0$
$A_7 : \forall x, y, x \times Sy = x \times y + x$
$Rec_F : \{F[x := 0] \wedge \forall y(F[x := y] \Rightarrow F[x := Sy]) \Rightarrow \forall x F\}$

On notera $\Gamma \vdash \Delta$ pour $PA, \Gamma \vdash \Delta$

Théorème 1. *On peut déduire A_2 du schéma de récurrence uniquement.*

$\vdash A_2$		$Rec(1)(2)$
(1)	$\vdash 0 = 0 \vee \exists z(0 = Sz)$	$\vee_i^g$
	$\vdash 0 = 0$	$=_i$
(2)	$\vdash \forall x\{x = 0 \vee \exists z(x = Sz) \Rightarrow Sx = 0 \vee \exists z(Sx = Sz)\}$	$\forall_i$
	$\vdash x = 0 \vee \exists z(x = Sz) \Rightarrow Sx = 0 \vee \exists z(Sx = Sz)$	$\rightarrow_i$
	$x = 0 \vee \exists z(x = Sz) \vdash Sx = 0 \vee \exists z(Sx = Sz)$	$\vee_i^d$
	$x = 0 \vee \exists z(x = Sz) \vdash \exists z(Sx = Sz)$	$\exists_i[x]$
	$x = 0 \vee \exists z(x = Sz) \vdash Sx = Sx$	$=_i$

On va à présent prouver la commutativité de l'addition.

Lemme 1. *$PA \vdash \forall x(0 + x = x)$.*

	$\vdash \forall x(0 + x = x)$	$Rec(1)(2)$
(1)	$\vdash 0 + 0 = 0$	$\forall_e[0]$
	$\vdash \forall x, x + 0 = x$	A_4
(2)	$\vdash \forall y\{0 + y = y \Rightarrow 0 + Sy = Sy\}$	$\forall_i, \rightarrow_i$
	$0 + y = y \vdash 0 + Sy = Sy$	A_5
	$0 + y = y \vdash S(0 + y) = Sy$	$=_e$ (3)(4)
(3)	$0 + y = y \vdash Sy = Sy$	$=_i$
(4)	$0 + y = y \vdash 0 + y = y$	ax

Lemme 2. *$PA \vdash \forall x, y, (Sx + y = S(x + y))$.*

	$\vdash \forall x, y, (Sx + y = S(x + y))$	$\forall_i$
	$\vdash \forall y, (Sx + y = S(x + y))$	$Rec(1)(2)$
(1)	$\vdash Sx + 0 = S(x + 0)$	A_4 et $=_e \times 2$
	$\vdash Sx = Sx$	ax
(2)	$\forall y, \{(Sx + y = S(x + y)) \Rightarrow (Sx + Sy = S(x + Sy))\}$	$\forall_i, \rightarrow_i$
	$Sx + y = S(x + y) \vdash Sx + Sy = S(x + Sy)$	A_5 et $=_e \times 2$
	$Sx + y = S(x + y) \vdash S(Sx + y) = SS(x + y)$	$=_e +ax$
	$Sx + y = S(x + y) \vdash SS(x + y) = SS(x + y)$	$=_i$

Théorème 2. $PA \vdash \forall x, y, (x + y = y + x)$.

	$\vdash \forall x, y, (x + y = y + x)$	$Rec(1)(2)$
(1)	$\vdash \forall y, (0 + y = y + 0)$	$=_e +A_4$
	$\vdash \forall y, (0 + y = y)$	lemme 1
(2)	$\vdash \forall x, \{\forall y, x + y = y + x \Rightarrow \forall y, Sx + y = y + Sx\}$	$\forall_i, \rightarrow_i$
	$\forall y, x + y = y + x \vdash \forall y, Sx + y = y + Sx$	$=_e +A_5$
	$\forall y, x + y = y + x \vdash \forall y, Sx + y = S(y + x)$	$=_e$ +lemme 2
	$\forall y, x + y = y + x \vdash \forall y, Sx + y = S(y + x)$	$=_e +ax + ax$