Algorithme de réduction d'automate

Benjamin Hellouin

Lawson, "Minimisation of automata"

Algorithme de réduction d'automate
    Pour tout $(u, v) \in F \times V \backslash F$ **faire**
        $T(\{u, v\}) \leftarrow$ **faux**
    Tant que la table subit des modifications **faire**
        Pour tout $\{u, v\}$ non marqué **faire**
            Pour tout $a \in \Sigma$ **faire**
                Si $T(\{\delta(u, a), \delta(v, a)\}) =$ **faux alors**
                    $T(\{u, v\}) \leftarrow$ **faux**
    Pour tout $\{u, v\}$ non marqué **faire**
        $T(\{u, v\}) \leftarrow$ **vrai**

1 Correction du calcul de $\sim$

Théorème 1. *L'algorithme termine et renvoie la table correspondant à la relation $\sim$, autrement dit, les paires marquées comme discernables le sont et les paires non marquées sont indiscernables.*

On note $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ les états successifs de la table après chaque étape.

Lemme 1. *Une paire $(u, v) \in V$ est marquée à la i-ème étape (i.e. dans T_i et pas dans T_{i-1}) si et seulement si u et v sont discernables par un mot de longueur i, et pas moins.*

Preuve : On prouve le lemme par récurrence.
Initialisation ($i = 0$) : les paires discernables par ϵ sont exactement les $(u, v) \in F \times V \backslash F$, et ils sont bien marqués à l'initialisation.
Hérédité : on suppose que le résultat est vrai pour tout $i \leq n$. Soit $\{u, v\}$ une paire discernable par $a_1 \ldots a_{n+1}$ (mot de longueur minimale) : alors elle n'est pas marquée dans T_n et $\{\delta(u, a_1), \delta(v, a_1)\}$ est discernable par un mot de longueur n, donc est marquée par hypothèse de récurrence, donc $\{u, v\}$ est marquée à la $(n + 1)$-ème étape. Le sens réciproque est trivial.

Preuve (du théorème) : On a prouvé que, si une paire est marquée, alors elle est discernable. Supposons que l'algorithme termine après l'étape n : cela implique qu'il n'existe aucune paire discernable par un mot de longueur n, au minimum. Mais alors aucune paire n'est discernable par un mot de longueur $p \geq n$ au minimum. Donc, si une paire n'est pas marquée, elle est indiscernable.

2 $A/\sim$ est réduit

Définition 1. *Par construction, δ est compatible avec $\sim$ et on peut la passer au quotient pour obtenir $\overline{\delta} : Q/\sim\ \mapsto Q/\sim$. On définit l'automate réduit de A : $A/\sim\ = (\Sigma, Q/\sim, \overline{\delta}, \overline{i}, \overline{F})$. Cet automate est réduit dans le sens où $\sim$ est triviale.*

Théorème 2. *Tout automate accessible et réduit est minimal.*

Preuve : Soit $A = (\Sigma, Q, \delta, i, F)$ un automate accessible et réduit, et $A' = (\Sigma', Q', \delta', i', F')$ un automate tel que $\mathcal{L}(A') = \mathcal{L}(A)$. Soit $\sim'$ la relation d'indiscernabilité sur $Q \times Q'$. Alors $i \sim' i'$ puisque A et A' reconnaissent le même langage. On remarque par ailleurs que $q \sim' q' \Rightarrow \forall a \in \Sigma, \delta(q, a) \sim' \delta'(q', a)$. Comme A est accessible, chaque état de Q est indiscernable d'au moins un état de Q'.

Supposons $q_1 \sim' q'$ et $q_2 \sim' q'$. D'après la définition, il est clair que cela implique $q_1 \sim q_2$, ce qui est absurde puisque l'automate est réduit. Donc les classes $A_q = \{q' \in Q' \mid q \sim' q'\}$ sont non vides et disjointes, ce qui prouve que $|Q| < |Q'|$.

(Dans le cas d'égalité, ceci définit un isomorphisme entre A et A', ce qui résout le problème de l'isomorphisme d'automates.)