# La série $\Sigma$ $1/p$ diverge

Benjamin Hellouin

On note $p_1 \dots p_n \dots$ les nombres premiers par ordre croissant.

**Théorème 1.** *La série* $\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$ *diverge quand* $n \to \infty$.

**Lemme 1.** *Le produit* $\prod_{i=1}^{N} (\sum_{k=0}^{\infty} p_i^{-k})$ *diverge.*

*Preuve du lemme.* On note $u(k) = \prod_{i \leq k} (1 + p_i^{-1} + p_i^{-2} \dots)$ qui est un produit fini de séries absolument convergentes. En développant et par la multiplicativité de $f$, on a

$$u(k) = \sum_{\alpha_1, \dots \alpha_k = 0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}}.$$

On note que les entiers qui apparaissent dans la somme sont exactement les entiers dont les facteurs premiers sont tous $\leq p_k$, et que chaque entier n'apparait qu'une fois (unicité de la décomposition).

En particulier, on a $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \leq u(\pi(x))$. Par le théorème d'Euclide, $\pi(x) \to \infty$, et par conséquent $u(x) \to \infty$.

*Preuve du théorème.* On sait que $\sum_{k=0}^{\infty} p_i^{-k} = \frac{1}{1 - p_i^{-1}}$, et donc $\prod_{i=1}^{N} \left( \frac{1}{1 - p_i^{-1}} \right)$ diverge. De même la série $\sum_i \log(1 - 1/p_i)$ diverge. Comme $1/p_i \to 0$, on a $\log(1 - 1/p_i) \underset{i \to \infty}{\sim} 1/p_i$. Cela implique que la série $\sum 1/p_i$ diverge (les sommes partielles sont équivalentes).

**Preuve alternative :**

En tant que somme de termes positifs, $\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Raisonnons par l'absurde : supposons que $\sum_i \frac{1}{p_i}$ converge dans $\mathbb{R}$. Alors son reste tend vers 0, et en particulier on peut trouver $k$ tel que $\sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$.

On appelera les nombres premiers $p_1 \dots p_k$ des *petits premiers*, et tous les autres des *grands premiers*. On partitionne $\mathbb{N}$ en deux ensembles : l'ensemble $G$ des entiers ayant au moins un grand facteur premier, et $P$ les entiers n'ayant que des petits facteurs premiers. De plus, on note $G_N$, resp. $P_N$, les ensembles $G \cap [1, N]$ (resp. $P \cap [1, N]$), et on veut estimer leur cardinal.

Première remarque : on a évidemment $|G_N| + |P_N| = N$.

$|G_N|$ : pour tout grand entier $p_i$, $[1, N]$ contient exactement $\left|\frac{N}{p_i}\right|$ multiples de $p_i$. Par conséquent, on a

$$|G_N| \leq \sum_{i \geq k+1} \left|\frac{N}{p_i}\right| < \frac{N}{2}.$$

$|P_N|$ : tout entier de $P_N$ peut s'écrire sous la forme $a_n b_n^2$, où $a_n$ est un produit de facteurs premiers distincts. Comme il n'y a que $k$ petits entiers distincts, $a_n$ peut prendre $2^k$ valeurs différentes quand $n$ parcourt $P_N$. De plus, comme $b_n \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{N}$, il ne peut prendre que $\sqrt{N}$ valeurs différentes on a

$$|P_N| \leq 2^k \sqrt{N}.$$

Prendre $N = 2^{2k+2}$ permet alors de conclure.