Équations différentielles linéaires et séries entières

Benjamin Hellouin

Queffelec-Zuily, “Équations différentielles”

Théorème 1. *On considère l'équation différentielle linéaire homogène* (E) $x'' + p(x)x' + q(x)x = 0$*, où* p *et* q *sont deux fonctions développables en série entière de rayon de convergence* $\geq R$: $p(x) = \sum p_n x^n$ *et* $q(x) = \sum q_n x^n$*. Alors* (E) *admet une unique solution vérifiant* $y(0) = a_0$ *et* $y'(0) = a_1$*,* y *étant développable en série entière de rayon de convergence* $\geq R$ *(résultat* ***global****).*

Preuve de l'unicité. Supposons qu'on a une telle solution $y(x) = \sum y_n x^n$. Alors :

- $y'(x) = \sum (n+1) y_{n+1} x^n, y''(x) = \sum (n+1)(n+2) y_{n+2} x^n$;
- $p(x)y'(x) = \sum (\sum_{j=0}^{n} (j+1) y_{j+1} p_{n-j}) x^n$;
- $q(x)y(x) = \sum (\sum_{j=0}^{n} y_j q_{n-j}) x^n$.

Alors y est solution de l'équation (E) si et seulement si tous les coefficients de la série $x'' + p(x)x' + q(x)x$ sont nuls, autrement dit :

$$\forall n \geq 0,\ (n+1)(n+2) y_{n+2} + \sum_{j=0}^{n} ((j+1) y_{j+1} p_{n-j} + y_j q_{n-j}) = 0$$

Il s'agit d'une relation de récurrence qui n'admet qu'une seule solution quand les valeurs de y_0 et y_1 sont imposées ; comme $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$, le résultat en découle.

Preuve de l'existence. On a trouvé la relation de récurrence nécessairement satisfaite par la solution. Il ne reste qu'à démontrer que la série $\sum y_n x^n$ ainsi définie a un rayon de convergence $\geq R$. On pose pour cela, quand $r < R$:

$$P_r = \sum_{n=0}^{\infty} |p_n| r^n ; Q_r = \sum_{n=0}^{\infty} |q_n| r^n.$$

On va maintenant montrer qu'il existe une constante M_r telle que $|y_n| \leq M_r r^{-n}$. Cela implique que la série $\sum y_n x^n$ converge uniformément sur tout compact de $B(0, r)$, pour tout $r < R$, ce qui permet de conclure. On va chercher par récurrence un ensemble de conditions suffisantes.

Initialisation : $M_r \geq y_0, r y_1$ est suffisant.

Hérédité : Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n+1$. Alors la relation de récurrence entraîne :

$$(n+2)(n+1)|y_{n+2}| \leq \sum_{j=0}^{n} \left((j+1) \frac{M_r}{r^{j+1}} |p_{n-j}| + \frac{M_r}{r^j} |q_{n-j}| \right).$$

$$\leq \frac{(n+1)M_r}{r^{n+1}} P_r + \frac{M_r}{r^n} Q_r \leq (n+1) \frac{M_r}{r^{n+2}} [r P_r + r^2 Q_r].$$

Ainsi une condition suffisante pour $|y_{n+2}| \leq \frac{M_r}{r^{n+2}}$ est $\frac{rP_r + r^2 Q_r}{n+2} \leq 1$. Or cette condition est vérifiée à partir d'un certain rang $n_0(r)$; ainsi M_r convient à la condition que $|y_n| \leq M_r r^{-n}$ soit respecté pour les $n_0(r)+1$ premiers termes, c'est-à-dire $\forall j \leq n_0(r)+1, M_r \geq y_j r^j$. Une telle constante existe nécessairement, ce qui permet de conclure comme expliqué ci-dessus.