Équivalent de suites récurrentes via les séries

Benjamin Hellouin

FGN analyse 1

Théorème 1. *Soit $f : [0, c] \to [0, c]$, continue en 0, admettant un DL de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha), a > 0, \alpha > 1$. Alors la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0 et on se propose d'en donner un équivalent.*

Interêt : trouver l'ordre de convergence de la suite lorsque la dérivée en 0 vaut 1 (la convergence n'est pas géométrique). L'étude d'une telle suite divergente est souvent facilitée par l'étude de la série téléscopique $u_{n+1} - u_n$, et sommation des sommes partielles. On utilise une méthode semblable ici.

On a $f(0) = 0$ et $f(x) < x$ sur un certain intervalle $[0; \eta[$. Si u_0 est pris dans cet intervalle, u_n est décroissante est minorée donc converge vers l'unique point fixe de f dans cet intervale, 0.

Équivalent : Donnons une heuristique pour trouver la série télescopique à considérer. On a $u_{n+1} - u_n \sim \alpha u_n^\alpha$, et on peut considérer le terme de droite comme une dérivée discrète. Par analogie avec l'équation différentielle $y' = -\alpha y^\alpha$ qui s'intègre en $(y^{1-\alpha})' = a(\alpha - 1)$, on est amené à considérer la quantité $u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$ en espérant un résultat similaire.

Commençons par un DL de $f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}$:

$$\begin{aligned} f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} &= (x - ax^\alpha + o(x^\alpha))^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} \\ &= x^{1-\alpha}\left[(1 - ax^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}))^{1-\alpha} - 1\right] \\ &= a(\alpha - 1) + o(1). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient que la série de terme général $u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$ n'est pas sommable, et de signe constant à partir d'un certain rang. On peut donc sommer les équivalents :

$$u_n^{1-\alpha} - u_0^{1-\alpha} \sim (\alpha - 1)an, \quad \text{soit} \quad u_n \sim ((\alpha - 1)an)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Application. Considérons par exemple $f(x) = \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Le résultat précédent donne $u_n \sim \frac{2}{n}$, et on voudrait pousser un ordre plus loin en utilisant la même méthode.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} - 1\right] \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + o(x) \end{aligned}$$

En considérant la suite $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{n}{2}$, on a alors $v_{n+1} - v_n \sim -\frac{u_n}{12} \sim -\frac{1}{6n}$, soit en sommant les équivalents $v_n \sim -\frac{1}{6}\ln n$.

Pour conclure, on a

$$u_n \sim \frac{1}{\frac{n}{2} - \frac{1}{6}\ln n} = \frac{2}{n}\frac{1}{1 - \frac{\ln n}{3n}}$$

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$